
Feuille de TD 6

Propriétés des espaces de Banach.

Exercice 1

1. Montrer $\{1_A, A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ est un sous-ensemble fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.
2. En déduire que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.
3. Montrer que $T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 1_{](1/n+2),1/(n+1)]}$ définit une isométrie $T : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to L^\infty([0,1], Leb)$ et en déduire que $L^\infty([0,1], Leb)$ n'est pas séparable.

Exercice 2

Soit E l'espace vectoriel $L^2([0,1], Leb)$ muni de la norme $||.||_1$ (induite par $L^1([0,1], Leb)$). et soit F l'espace vectoriel $L^2([0,1], Leb)$ muni de la norme $||.||_2$ usuelle. Montrer que l'application $L : E \to F$ définie par $L(x) = x$ admet un graphe ferme mais qu'elle n'est pas continue. Que peut-on en déduire sur $(E, ||.||_1)$?

Exercice 3

Soit (L_n) une suite d'applications linéaires continues déun espace de Banach E dans un espace normé F . On suppose que pour chaque $x \in E$, la limite $L(x) := \lim_{n\to\infty} L_n(x)$ existe. Prouver que L est une application linéaire continue.

Exercice 4

Soit E un espace de Banach par rapport à deux normes différentes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2.$$

Montrer que les normes sont équivalentes ; i.e., qu'il existe d ¿ 0 tel que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_2 \leqslant d\|x\|_1.$$

Fournir un contre-exemple dans le cadre où les mots ”espace de Banach” sont remplacés par ”evn”.

Exercice 5 Soient F et F deux espaces de Banach. Soit T une application linéaire de E dans F.

1. On suppose que pour toute suite $x_n \to 0$ et tout $f \in F'$ alors $f(T(x_n)) \to 0$. Montrer que T est continue.
2. On ne fait plus l'hypothèse du 1. Montrer que si T est continue pour la topologie faible alors T est continue pour la topologie de la norme. [Indication : On pourra considérer le graphe de T.]

Exercice 6 Soit E un espace de Banach uniformément convexe et C un convexe fermé (non vide).

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y = P_C(x) \in C$ avec
$$||x - y|| = \inf_{c\in C} ||x - c||.$$
2. Montrer que toute suite minimisante y_n converge en norme vers $P_C(x)$.
3. Montrer que P_C est uniformément continue sur les bornés de E.