

Feuille de TD 6
Théorie spectrale.

En général, H sera un espace de Hilbert, $B(H)$ l'ensemble des applications linéaires continue sur H et $I \in B(H)$ désigne l'application identité.

Exercice 1 Soit $H = L^2(\Omega, \mu, \mathbb{R})$. On pose $C = \{f \in H : f \geq 0 \text{ p.p.}\}$.

Montrer que C est un convexe fermé et que $P_C(f) = f1_{\{f \geq 0\}}$.

Exercice 2 Soit H un espace de Hilbert et $T \in B(H)$ un opérateur positif.

1. Montrer que pour $a > 0$, $\langle (aI + T)\cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur H
2. Soit $f \in H$ montrer qu'il existe $u \in H$ tel que pour tout $g \in H$:

$$\langle (aI + T)u, g \rangle = \langle f, g \rangle.$$

3. En déduire que $(aI + T)$ est inversible dans $B(H)$, donc $] -\infty, 0[\subset \rho(T)$.

Exercice 3 Soit $T = T^* \in B(H)$

1. Vérifier que $(T-i)^*(T-i) = (T^2+1)$ et en déduire (en utilisant l'exercice précédent) que $T - i$ est inversible.
2. Montrer que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ puis que si T est positif alors $\sigma(T) \subset [0, \infty[$.
3. Si $T = T^*$ et $m = \inf\{\langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1\}$, $M = \sup\{\langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1\}$. Montrer que $\sigma(T) \subset [m, M]$.

Exercice 4 Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et le shift $S((x_i)_{i \geq 0}) = (x_{i+1})_{i \geq 0}$, on rappelle que son adjoint est $S^*((x_i)_{i \geq 0}) = (0, x_0, x_1, \dots)$. On pose $X = S + S^*$ et on cherche à montrer que $\sigma(X) = [-2, 2]$.

1. Montrer que $\|X\| \leq 2$ et en déduire que $\sigma(X) \subset [-2, 2]$.
2. Montrer que $\langle X^{2n+1}e_0, e_0 \rangle = 0$ et que $\langle X^{2n}e_0, e_0 \rangle = c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ où c_n est le nombre de Catalan vérifiant la récurrence $c_0 = 1, c_{n+1} = \sum_{i=0}^n c_i c_{n-i}$ (on ne montrera pas la formule explicite bien connue).
3. En déduire que pour $\lambda \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ (en prenant la racine à partie réelle positive)

$$\|((\epsilon i + \lambda)I + X)^{-1}e_0\|^2 = \int_{-2}^2 \frac{1}{(x + \lambda)^2 + \epsilon^2} \sqrt{4 - x^2} \frac{dx}{2\pi}$$

(On montrera d'abord que $\langle X^n e_0, e_0 \rangle = \int_{-2}^2 x^n \sqrt{4 - x^2} \frac{dx}{2\pi}$)

4. Conclure en montrant que pour tout $\lambda \in [-2, 2]$ on a

$$\|((\epsilon i + \lambda)I + X)^{-1}e_0\|^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty.$$

Exercice 5 Soit $T \in B(H)$, H espace de Hilbert. On suppose que T est un opérateur à trace au sens où dans la base hilbertienne $(f_j)_{j \in J}$,

$$\sum_{j \in J} \langle |T|f_j, f_j \rangle < \infty$$

1. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne de H . Montrer que $\sum_{i \in I} \langle |T|e_i, e_i \rangle < \infty$

2. En utilisant la décomposition polaire, montrer que $\sum_{i \in I} |\langle T e_i, e_i \rangle| < \infty$.
3. Montrer que la formule de la norme ne dépend pas de la base :

$$\|T\|_1 = \sum_{i \in I} \langle |T| e_i, e_i \rangle = \sum_{j \in J} \langle |T| f_j, f_j \rangle.$$

4. Soit $T = u|T|$ la décomposition polaire. Montrer que $V = |T|^{1/2}$, $U = |T|^{1/2}u^*$ sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt, c'est-à-dire que V^*V, U^*U sont des opérateurs à traces. (Indication : on pourra montrer que u^* est aussi une isométrie partielle et choisir une base du noyau de $\text{Ker}(u^*)$ et la compléter)
5. En utilisant la formule de polarisation et $T = U^*V$, montrer que la formule pour la trace ne dépend pas de la base : $\text{tr}(T) = \sum_{i \in I} \langle T e_i, e_i \rangle = \sum_{j \in J} \langle T f_j, f_j \rangle$.

Exercice 6 Soit $T \in S^1(H)$ et $B \in B(H)$.

1. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée et soit une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dénombrable de $K = \overline{\text{Vect}(u_k, |T|^{1/2}(u_k), k \in \mathbb{N})}$. Montrer que l'on peut extraire une sous suite telle que pour tout $l : \langle |T|^{1/2}(u_{n_k}), e_l \rangle \rightarrow_{k \rightarrow \infty} a_l$. Montrer que $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_l e_l \in K$ et $|T|^{1/2}(u_{n_k}) \rightarrow a$. En déduire que T est un opérateur compact.
2. Soit $T = u|T|$ la décomposition polaire. Montrer que $Bu|T|^{1/2}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt et en déduire que $BT \in S^1(H)$.
3. Montrer en utilisant une base $(e_n)_{n \in I}$ de H contenant les vecteurs propres de T que $|\text{tr}(BT)| \leq \|B\| \|T\|_1$.
4. En utilisant $T_{x,y}(z) = x \langle y, z \rangle$, montrer la formule pour la norme d'opérateur :

$$\|B\| = \sup\{|\text{tr}(BT)| : \|T\|_1 \leq 1\}.$$

5. Montrer que $J : B \mapsto (T \mapsto \text{tr}(BT))$ est une isométrie surjective $J : B(H) \rightarrow (S^1(H))'$.

[Indication pour $f \in (S^1(H))'$, considérer $B_f(x) = \sum_{j \in I} e_j f(T_{x, e_j})$]