

**Feuille de TD 6**  
Théorie spectrale.

En général,  $H$  sera un espace de Hilbert,  $B(H)$  l'ensemble des applications linéaires continue sur  $H$  et  $I \in B(H)$  désigne l'application identité.

**Exercice 1** Soit  $H = L^2(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ . On pose  $C = \{f \in H : f \geq 0 \text{ p.p.}\}$ .

Montrer que  $C$  est un convexe fermé et que  $P_C(f) = f1_{\{f \geq 0\}}$ .

**Exercice 2** Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $T \in B(H)$  un opérateur positif.

1. Montrer que pour  $a > 0$ ,  $\langle (aI + T)\cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $H$
2. Soit  $f \in H$  montrer qu'il existe  $u \in H$  tel que pour tout  $g \in H$  :

$$\langle (aI + T)u, g \rangle = \langle f, g \rangle.$$

3. En déduire que  $(aI + T)$  est inversible dans  $B(H)$ , donc  $]-\infty, 0[ \subset \rho(T)$ .

**Exercice 3** Soit  $T = T^* \in B(H)$

1. Vérifier que  $(T-i)^*(T-i) = (T^2+1)$  et en déduire (en utilisant l'exercice précédent) que  $T - i$  est inversible.
2. Montrer que  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$  puis que si  $T$  est positif alors  $\sigma(T) \subset [0, \infty[$ .
3. Si  $T = T^*$  et  $m = \inf\{\langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1\}$ ,  $M = \sup\{\langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1\}$ . Montrer que  $\sigma(T) \subset [m, M]$ .

**Exercice 4** Soit  $H = \ell^2(\mathbb{N})$  et le shift  $S((x_i)_{i \geq 0}) = (x_{i+1})_{i \geq 0}$ , on rappelle que son adjoint est  $S^*((x_i)_{i \geq 0}) = (0, x_0, x_1, \dots)$ . On pose  $X = S + S^*$  et on cherche à montrer que  $\sigma(X) = [-2, 2]$ .

1. Montrer que  $\|X\| \leq 2$  et en déduire que  $\sigma(X) \subset [-2, 2]$ .
2. Montrer que  $\langle X^{2n+1}e_0, e_0 \rangle = 0$  et que  $\langle X^{2n}e_0, e_0 \rangle = c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$  où  $c_n$  est le nombre de Catalan vérifiant la récurrence  $c_0 = 1, c_{n+1} = \sum_{i=0}^n c_i c_{n-i}$  (on ne montrera pas la formule explicite bien connue).
3. En déduire que pour  $\lambda \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$  (en prenant la racine à partie réelle positive)

$$\|((\epsilon i + \lambda)I + X)^{-1}e_0\|^2 = \int_{-2}^2 \frac{1}{(x + \lambda)^2 + \epsilon^2} \sqrt{4 - x^2} \frac{dx}{2\pi}$$

(On montrera d'abord que  $\langle X^n e_0, e_0 \rangle = \int_{-2}^2 x^n \sqrt{4 - x^2} \frac{dx}{2\pi}$ )

4. Conclure en montrant que pour tout  $\lambda \in [-2, 2]$  on a

$$\|((\epsilon i + \lambda)I + X)^{-1}e_0\|^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty.$$

**Exercice 5** Soit  $T \in B(H)$ ,  $H$  espace de Hilbert. On suppose que  $T$  est un opérateur à trace au sens où dans la base hilbertienne  $(f_j)_{j \in J}$ ,

$$\sum_{j \in J} \langle |T|f_j, f_j \rangle < \infty$$

1. Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base hilbertienne de  $H$ . Montrer que  $\sum_{i \in I} \langle |T|e_i, e_i \rangle < \infty$

2. En utilisant la décomposition polaire, montrer que  $\sum_{i \in I} |\langle T e_i, e_i \rangle| < \infty$ .
3. Montrer que la formule de la norme ne dépend pas de la base :

$$\|T\|_1 = \sum_{i \in I} \langle |T| e_i, e_i \rangle = \sum_{j \in J} \langle |T| f_j, f_j \rangle.$$

4. Soit  $T = u|T|$  la décomposition polaire. Montrer que  $V = |T|^{1/2}, U = |T|^{1/2}u^*$  sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt, c'est-à-dire que  $V^*V, U^*U$  sont des opérateurs à traces. (Indication : on pourra montrer que  $u^*$  est aussi une isométrie partielle et choisir une base du noyau de  $\text{Ker}(u^*)$  et la compléter)
5. En utilisant la formule de polarisation et  $T = U^*V$ , montrer que la formule pour la trace ne dépend pas de la base :  $\text{tr}(T) = \sum_{i \in I} \langle T e_i, e_i \rangle = \sum_{j \in J} \langle T f_j, f_j \rangle$ .

**Exercice 6** Soit  $T \in S^1(H)$  et  $B \in B(H)$ .

1. Soit  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite bornée et soit une base hilbertienne  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dénombrable de  $K = \overline{\text{Vect}(u_k, |T|^{1/2}(u_k), k \in \mathbb{N})}$ . Montrer que l'on peut extraire une sous suite telle que pour tout  $l : \langle |T|^{1/2}(u_{n_k}), e_l \rangle \rightarrow_{k \rightarrow \infty} a_l$ . Montrer que  $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_l e_l \in K$  et  $|T|^{1/2}(u_{n_k}) \rightarrow a$ . En déduire que  $T$  est un opérateur compact.
2. Soit  $T = u|T|$  la décomposition polaire. Montrer que  $Bu|T|^{1/2}$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt et en déduire que  $BT \in S^1(H)$ .
3. Montrer en utilisant une base  $(e_n)_{n \in I}$  de  $H$  contenant les vecteurs propres de  $T$  que  $|\text{tr}(BT)| \leq \|B\| \|T\|_1$ .
4. En utilisant  $T_{x,y}(z) = x \langle y, z \rangle$ , montrer la formule pour la norme d'opérateur :

$$\|B\| = \sup\{|\text{tr}(BT)| : \|T\|_1 \leq 1\}.$$

5. Montrer que  $J : B \mapsto (T \mapsto \text{tr}(BT))$  est une isométrie surjective  $J : B(H) \rightarrow (S^1(H))'$ .

[Indication pour  $f \in (S^1(H))'$ , considérer  $B_f(x) = \sum_{j \in I} e_j f(T_{x, e_j})$ ]