Feuille de TD 6

Théorie spectrale.

En général, H sera un espace de Hilbert complexe, $B(H)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur H et $I = 1 \in B(H)$ désigne l'application identité.

Exercice 1 Soit H un espace de Hilbert et $T \in B(H)$ un opérateur positif.

1. Montrer que pour $a > 0$, $\langle (aI + T).,.\rangle$ est un produit scalaire sur H
2. Soit $f \in H$ montrer qu'il existe $u \in H$ tel que pour tout $g \in H$:
$$\langle (aI + T)u, g\rangle = \langle f, g\rangle.$$
Utiliser Lax Milgram pour ça.
3. En déduire que $(aI + T)$ est inversible dans $B(H)$, donc $]-\infty, 0[\subset \rho(T)$.

Exercice 2 Soit $T = T^* \in B(H)$

1. Vérifier que $(T-i)^*(T-i) = (T^2+1)$ et en déduire (en utilisant l'exercice précédent) que $T - i$ est inversible.
2. Montrer que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ puis que si T est positif alors $\sigma(T) \subset [0, \infty[$.
3. Si $T = T^*$ et $m = \inf\{\langle Tx, x\rangle, ||x|| = 1\}, M = \sup\{\langle Tx, x\rangle, ||x|| = 1\}$. Montrer que $\sigma(T) \subset [m, M]$.

Exercice 3 (Problème du CCF 2015-2016) Soit $H = \ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace de Hilbert des suites complexes $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indicés par les entiers relatifs et de modules au carré sommables. Soit $K = L^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \lambda)$ l'espace de Hilbert des fonctions mesurables 2π périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeur complexe de module au carré intégrables pour la mesure de Lebesgue λ. On munit ces espaces des normes usuelles :

$$||c||^2 := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \lim_{K\to+\infty} \sum_{n=-K}^{K} |c_n|^2, \; si\; c \in H \quad ||f||^2 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x), \; si\; f \in K.$$

On pose $e_n(x) = exp(inx), n \in \mathbb{Z}$ de sorte que $e_n \in K$.

1. Montrer que $V : H \to K$ l'application linéaire tel que $V(c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ est une isométrie.
2. Soit $U : H \to H$ définie par $U(c) = d$ la suite telle que $d_{n+1} = c_n$. Montrer que U est une isométrie.
3. Calculer $U^* \in B(H)$. En déduire que U est unitaire donc n'est pas un opérateur compact.
4. Soit $X = U + U^* \in B(H)$. Montrer que la norme subordonnée (ou d'opérateur) est $|||X||| = 2$.
5. En déduire que $X + 2 + \epsilon^2$ est inversible pour $\epsilon \in \mathbb{R}^*$.
6. Vérifier que, pour V définie à la question 2 et pour tout $h \in H$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[V(Uh)](x) = e^{ix}[V(h)](x)$.
7. Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y]$, comme U, U^* commutent, on peut définir $P(U, U^*)$. Déduire de la question précédente que
$$||P(U, U^*)V^{-1}(e_0)|| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(e^{ix}, e^{-ix})|^2 d\lambda(x).$$

8. Montrer que pour $\epsilon \in \mathbb{R}^*$, $(U + U^* + i\epsilon)$ est inversible et

$$||(U + U^* + i\epsilon)^{-1}V^{-1}(e_0)|| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4cos^2(x) + \epsilon^2} d\lambda(x).$$

9. En déduire que $||(U + U^* + i\epsilon)^{-1}V^{-1}(e_0)|| \to_{\epsilon \to 0} +\infty$. Conclure que $[-2, 2] \subset \sigma(X)$ (commencer par 0 est dans le spectre de X).
10. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de X.

Exercice 4 Soit $T \in B(H)$. Montrer que T est compact au sens $\overline{T(B(0,1))}$ compact si et seulement si $\{T(x), ||x|| \leqslant 1\}$ compact.

Exercice 5 Soit (Ω, μ) un espace mesuré σ-fini. Soient $1 < p \leqslant \infty$, $E = (L^p(\Omega, \mu), ||.||_p)$, $F = (L^q(\Omega, \mu), ||.||_q)$ et $g \in L^q(\Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$ avec $1/p + 1/q = 1$

On définit $u : E \to F$ par :

$$[u(f)](s) = \int_\Omega g(s, t) f(t) dt.$$

Montrer que u est une application linéaire continue avec $|||u||| \leqslant ||g||_q$. Montrer aussi que u est compacte (On pourra utiliser la densité des fonctions étagées dans $L^q(\Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$).