Feuille de TD 6
Propriétés des espaces de Banach.

Exercice 1 (cf TD.)

Exercice 2 (cf TD.)

Exercice 3 (cf TD.)

Exercice 4 (cf TD.)

Exercice 5 (cf TD.)

Exercice 6 Soit E un espace de Banach uniformément convexe et C un convexe fermé (non vide).

1. Montrons que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y = P_C(x) \in C$ avec

$$||x-y|| = \inf_{c \in C} ||x-c||.$$

Posons $F(c) = ||x-c||$. F est continue (donc s.c.i.) convexe et $F(c) \geqslant ||c|| - ||x|| \to_{||c|| \to \infty} \infty$ E est réflexif, donc en appliquant le théorème du cours, on a existence d'un minimum et tout suite minimisante a une sous-suite convergeant faiblement vers un minimiseur.

Voyons que le minimiseur est unique. soit x, y atteignant le minimum, alors si $c \neq d, ||c-d|| = ||(x-c)-(x-d)|| \geqslant \epsilon L$ avec $L = ||x-c|| = ||x-d||$. alors $||(x-c)/L - (x-d)/L|| \geqslant \epsilon$, $||(x-c)/L||, ||(x-d)/L|| \leqslant 1$ donc par uniforme convexité, on a δ avec $||(x-c)+(x-d)||/2L \leqslant 1-\delta$

donc $||x-(c+d)/2|| \leqslant (1-\delta)||x-c||$ ce qui contredit la minimalité.

2. Montrons que toute suite minimisante y_n converge en norme vers $P_C(x)$.. ON commence par montrer qu'elle converge faiblement, soit $f \in E'$, $f(y_n)$ est une suite bornée, et pour toute sous-suite y_{n_k}, on a une sous-sous-suite $y_{n_{k_p}}$ congergeant faiblement vers $P_C(x)$, donc $f(y_{n_{k_p}})$ convergent vers $f(P_C(x))$ donc la seule valeur d'adhérence de $f(y_n)$ est $f(P_C(x))$ donc par compacité dans le corps des scalaires, on a convergence $f(y_n)$ vers $f(P_C(x))$ et donc y_n converge faiblement vers $P_C(x)$.

Montrons que la convergence est en fait normique. Soit $X = x - P_C(x)$ et $f \in E'$, $||f|| \leqslant 1$ avec $|X(f)| \geqslant (1-\delta/3)||X||$.

On regarde le voisinage $V = \{y \in E, |f(y-x)| < 2\delta||X||/3\}$ de la topologie $\sigma(E, E')$, Comme $x - y_n$ converge faiblement vers X, il existe N tel que $\forall n \geqslant N$

$$||\frac{X+(x-y_n)}{2}|| \geqslant |\frac{X+(x-y_n)}{2}(f)| \geqslant |X(f)| - |\frac{(X-(x-y_n))(f)}{2}| \geqslant (1-\delta/3)||X|| - \delta||X||/3 =$$

En appliquant la contraposée de l'uniforme convexité du (1) à $X/||X||, (x-y_n)/||x-y_n||$ (vu que $||x-y_n|| \to ||x-P_C(x)|| = ||X||$ vu qu'on a pris une suite minimisante donc pour n grand $(1/||x-y_n|| - 1/||X||) \leqslant \delta/3)$

$$||\frac{X}{2||X||} + \frac{(x-y_n)}{2||x-y_n||}|| \geqslant ||\frac{X+(x-y_n)}{2||X||}|| - \frac{||(x-y_n)||}{2} \mid 1/||x-y_n|| - 1/||X||) \mid \geqslant (1-\delta),$$

on obtient

$$||\frac{X}{||X||} - \frac{(x-y_n)}{||x-y_n||}|| \leqslant \epsilon.$$

$$||X-(x-y_n)|| \leqslant \epsilon||X|| + ||X|| \,|\, 1/||x-y_n|| - 1/||X|| \,|\, ||x-y_n||.$$

Donc $y_n \to P_C(x)$

3. Montrons que P_C est uniformément continue sur les bornés de E.
   Par l'absurde, sinon il existe $\epsilon > 0$ et deux suites bornés disons $||x_n||, ||y_n|| \leqslant M$ avec $||x_n - y_n|| \to 0$ et $||P_C(x_n) - P_C(y_n)|| \geqslant \epsilon_0$.
   Comme C est convexe

   $$||x_n - P_C(x_n)|| \leqslant ||x_n - \frac{P_C(x_n)+P_C(y_n)}{2}|| = ||\frac{x_n+y_n}{2} - \frac{P_C(x_n)+P_C(y_n)}{2}|| + ||x_n - y_n||/2$$

   et

   $$||y_n - P_C(y_n)|| \leqslant ||y_n - \frac{P_C(x_n)+P_C(y_n)}{2}|| = ||\frac{x_n+y_n}{2} - \frac{P_C(x_n)+P_C(y_n)}{2}|| + ||x_n - y_n||/2$$

   Soit donc $a_n = x_n - P_C(x_n), b_n = y_n - P_C(y_n)$, on a

   $$||\frac{a_n+b_n}{2}||^2 \geqslant \frac{||a_n||^2 + ||b_n||^2}{2} - \delta_n$$

   avec $\delta_n = ||x_n - y_n||^2/4 + ||x_n - y_n||||\frac{a_n+b_n}{2}|| \to 0$. Et on a aussi $||a_n - b_n|| \geqslant ||P_C(x_n) - P_C(y_n)|| - ||x_n - y_n|| \geqslant \epsilon_0/2$ pour n assez grand.
   Quitte à extraire, on suppose $||a_n|| \to a, ||b_n|| \to b$. Donc

   $$a + b = \lim ||a_n|| + ||b_n|| \geqslant \limsup ||a_n - b_n|| \geqslant \epsilon_0/2$$

   et de $\frac{||a_n||^2+||b_n||^2}{2} - \delta_n \leqslant \frac{||a_n||+||b_n||}{2}^2$ on déduit

   $$(a^2+b^2)/2 \leqslant (\frac{a+b}{2})^2$$

   donc $(\frac{a-b}{2})^2 \leqslant 0$ et donc $a = b \neq 0$.
   DOnc, $||a_n/||a_n|| - b_n/||b_n|||| \sim ||a_n - b_n||/a \geqslant \epsilon_0/2a$, et pour n assez grand $||a_n/||a_n|| - b_n/||b_n|||| \geqslant \epsilon_0/3a$
   Par l'uniforme convexité appliqué à $a_n/||a_n||; b_n/||b_n||$ il existe $\delta > 0$ tel que si $||a_n/||a_n|| - b_n/||b_n|||| \geqslant \epsilon = \epsilon_0/3a$ alors $\|a_n/2||a_n|| + b_n/2||b_n|||| \leqslant (1-\delta)$ donc pour n grand

   $$\|(a_n+b_n)/2\| \leqslant (1-\delta/2)^2 a^2$$

   ce qui contredit l'inégalité obtenu précédemment $||\frac{a_n+b_n}{2}||^2 \geqslant \frac{||a_n||^2+||b_n||^2}{2} - \delta_n$ qui implique que pour n grand

   $$||\frac{a_n+b_n}{2}||^2 \geqslant a^2 - \delta'_n$$

   avec $\delta'_n \to 0$.