Analyse pour l'informatique **Feuille d'exercices N°2**
2014-2015

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes :

i. $\sum(cosn\theta)z^n, \theta \in]0,\pi[$
ii. $\sum_{n\geq 1}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})z^n$
iii. $\sum \frac{n!}{2^n}z^n$
iv. $\sum 3^n z^{2n+5}$
v. $\sum \frac{(-2)^n}{n+1}z^{2n+1}$

Exercice 2. Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} n^2x^n$.
2. $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2-1}x^n$
3. $\sum_{n\geq 2} \frac{n^2+4n-1}{n!}x^n$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}x^n$

Exercice 3. On considère la série entière $\sum a_n x^n$ où $(a_n)_{n\geq 0}$ est la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et les relations $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$. On note R le rayon de convergence de la série et f sa somme définie sur $]-R, R[$.

1. Montrer que, pour $n \geq 0$, $1 \leq a_n \leq 2^{n+1} - 1$. En déduire que $R \geq 1/2$.
2. Calculer $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$. En déduire que $R = 1/2$.
3. Exprimer, pour tout $n \geq 0$, a_n en fonction de n.

Dans chaque exercice suivant, il est recommandé d'esquisser le graphe de la fonction à étudier.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π- périodique paire définie par $f(t) = 1$ si $t \in [0, \pi/2]$ et $f(t) = -1$ si $t \in]\pi/2, \pi]$.

1. Calculer la série de Fourier et étudier ses propriétés de convergence.
2. En déduire que
$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π- périodique paire définie par $f(t) = t$ si $t \in [0, \pi/2]$ et $f(t) = \pi - t$ si $t \in]\pi/2, \pi]$.

1. Calculer la série de Fourier et étudier ses propriétés de convergence.
2. En déduire que
$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - E(x)$ ($f(x)$ est la partie fractionnaire de x)

1. Montrer que le coefficient c_n de la série de Fourier de f est donné par $c_n = -\frac{1}{2in\pi}$ si $n \neq 0$ et $c_0 = \frac{1}{2}$.
   En déduire la série de Fourier en base réelle de f puis déterminer sa somme.
2. En déduire la valeur de la somme de
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}.$$
   pour $t \in]0, \pi[$.