

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n + n^{100}}{n^{101}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-2} + \ln(n) + \sqrt{n}}{\pi\sqrt{n} + 1}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.$$

La suite $u_n = (1 - \frac{1}{n}) \sin(\frac{2n\pi}{3})$ a-t-elle une limite ? Calculer $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Exercice 2. Relations de comparaison.

1. Soit $u_n = n^4 + \cos(n) + 1/n$. Dire si $u_n \sim v_n$ pour $v_n = n^4, v_n = 2n^4, v_n = n^4 + 1, v_n = n^4 + 1/n$.
2. Calculer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{\sin(\frac{2}{n})}{\sin(\frac{1}{n})}, v_n = \frac{n^6 + \cos(n) + 1}{n^4 + n} \tan(\frac{1}{n^2}), w_n = \frac{2}{\sin^2(\frac{1}{n})} - \frac{1}{1 - \cos(\frac{1}{n})}, z_n = \frac{\exp\left(\frac{2}{\sin^2(\frac{1}{n})}\right)}{\exp\left(\frac{1}{1 - \cos(\frac{1}{n})}\right)}.$$

Exercice 3. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Pour $n \geq 0$, on pose $u_n = \cos(n\theta)$ et $v_n = \sin(n\theta)$.

1. Factoriser $u_{n+2} - u_n$ et $v_{n+2} - v_n$.
2. En utilisant ce qui précède et les opérations sur les limites, montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ ne sont pas convergentes.
3. Est-ce que ces deux suites admettent des sous-suites convergentes ?

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, calculer en fonction de n le terme général u_n de la suite.

1. $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par $u_0 = 5, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n, n \geq 0$.
2. $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par $u_0 = 1, u_1 = \sqrt{2}$ et $u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n, n \geq 0$.
3. $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $u_{n+2} = -6u_{n+1} - 9u_n, n \geq 0$.

Exercice 5. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie pour $x_0 > 0$ par $x_{n+1} = x_0\sqrt{x_n}$. En se ramenant à une suite arithmetico-géométrique, montrer que $(x_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ définies par u_0, v_0 tels que $0 < u_0 < v_0$ et les relations $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$.

1. Montrer que les deux suites sont adjacentes.
2. On pose $u_0 = v_0 \cos(\alpha), p_0 = 1$ et pour $n \geq 1, p_n = \prod_{k=1}^n \cos(\frac{\alpha}{2^k})$. Montrer que $u_n = v_n \cos(\frac{\alpha}{2^n}), v_n = v_0 p_n$ et $\sin(\frac{\alpha}{2^n}) p_n = \frac{1}{2} \sin(\frac{\alpha}{2^{n-1}}) p_{n-1}$. En déduire la limite commune de ces suites.

Exercice 7. Soit $a > 0$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie pour $x_0 > 0$ par $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$. Montrer que $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. En déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.

Exercice 8. Soit $a > 0$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie pour $x_0 > 0$ par $x_{n+1} = x_n + \frac{a}{x_n}$ et soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_n = x_{n+1}^2 - x_n^2$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2a$.

Exercice 9. Soit $a > 0$. Pour $n \geq 1$ on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, u_n = a^{H_n}$ et $v_n = H_n - \ln(n)$.

1. En étudiant par exemple les variations de $x \mapsto (x+1) \ln(x+1) - x$ et $x \mapsto (x+1) \ln(x+1) - x - x^2/2$, montrer que pour tout $x > -1$, on a $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$ et pour $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq \frac{x}{2}(1 + \frac{1}{1+x})$.

2. En utilisant les inégalités précédentes, montrer que v_n est décroissante et minorée. Elle admet donc une limite γ appelée constante d'Euler telle que $\gamma \simeq 0,577$.
3. Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ puis celle de la série $\sum u_n$.

Exercice 10. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie pour $x_0 > 0$ par $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$ et soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_n = e^{x_{n+1}} - e^{x_n}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

Exercice 11. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

- (a) $u_n = \frac{n+1}{n^3+7}$, $u_n = \frac{n+1}{n+7}$, $u_n = \frac{n+1}{n^2-7}$, $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $u_n = \frac{2^n+3^n}{n^2+5^n}$, $u_n = \frac{1}{n(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}$.
- (b) $u_n = \frac{1}{(\ln(n^2+2))}$, $u_n = \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$, $u_n = \frac{n}{2^n}$, $u_n = \frac{n^{100}}{2^n}$, $u_n = \frac{1}{n!}$, $u_n = \frac{n^{100}}{n!}$, $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$.
- (c) $u_n = \left[\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$, $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Exercice 12. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

a. $u_n = \frac{n!}{n^n}$ b. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ c. $u_n = \frac{(n!)^2}{2n^2}$ d. $u_n = \frac{n^2}{n^3+1}$ e. $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$

f. $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^{\ln n}}$ g. $u_n = \frac{1}{\ln(n^2+n+1)}$ h. $u_n = \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n k^2}$ i. $u_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$ mais que la réciproque est fautive.

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et la relation $u_{n+1} = u_n \frac{1+u_n}{1+2u_n}$.

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$
- Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim -u_n^2$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right) = 1$.
- En déduire que la série $\sum u_n^2$ est convergente et que la série $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 15. Etudier la convergence de la série de terme générale u_n dans les cas suivants :

- (a) $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$, $u_n = \frac{a^n}{n!}$ ($a \in \mathbb{C}$), $u_n = na^{n-1}$ ($a \in \mathbb{C}$).
- (b) $u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln(n+1))}$, $u_n = \sin\left((n + \frac{1}{n})\pi\right)$, $u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.
- (c) $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.

Exercice 16. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_n = \frac{a-(-1)^n\sqrt{n}}{n-(-1)^n\sqrt{n}}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Calculer $w_n = u_n + v_n$. En déduire, selon les valeurs de a , la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 17. Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n \geq 2}$ la suite définie par $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$. Déterminer un équivalent de $u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. En déduire, selon les valeurs de α , la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 18. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geq n_a}$ la suite définie par $u_n = \frac{a^n}{a^n + \ln(n)}$. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.

Exercice 19. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_n = \sqrt[n]{n} - {}^{n+1}\sqrt{n}$. Montrer que $u_n \sim \frac{\ln(n)}{n^2}$ en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 20. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$. Montrer que $u_{2n} + u_{2n+1} = 0$. Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 21. Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ la suite définie par $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. En utilisant une somme télescopique, montrer que $\sum u_n$ est convergente et calculer sa somme.