Université Claude Bernard | Mathématiques
L2 Analyse pour l'Informatique | 2013-2014

Contrôle continu
Jeudi 17 octobre 2013

Durée : 1 heure.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin à justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours (5 minutes maxi, 5 points) :

1. Enoncer le critère des séries télescopiques.
2. Donner la définition des convergences normale et uniforme des séries de fonctions.
3. Donner la définition et une autre formule pour le rayon de convergence d'une série entière.

Exercice 1 (4 points) Indiquer (en justifiant) de quelle nature (convergente ou divergente) sont les séries suivantes :

$$\sum \cos\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad \sum \frac{n^5}{n^6+2}, \qquad \sum \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}, \qquad \sum \frac{(n!)^5}{(3n)!(2n)!}.$$

Exercice 2 (5 points)

1. Est ce que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)\sqrt{n}}$ est absolument convergente ? convergente ? (justifier en utilisant les critères du cours).
2. Donner un équivalent de $\left(\sin\left(\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)\sqrt{n}}\right)$.
3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)\sqrt{n}}\right)$?

Exercice 3 (6 points) Soit les suites de fonctions suivantes définies sur $[0,\infty[$

$$f_n(x) = \frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-2nx}}, \qquad g_n(x) = \frac{nx^3}{nx^2+1}.$$

1. Montrer que f_n et g_n convergent simplement et calculer leurs limites simples.
2. f_n et g_n convergent elles uniformément sur $[0,\infty[$?
3. f_n et g_n convergent elles uniformément sur $[1,\infty[$?
4. g_n' converge elle uniformément sur $[0,\infty[$?