Université Claude Bernard
L2 Analyse pour l'Informatique

Mathématiques
2013-2014

Correction du Contrôle continu (avec barême indicatif, susceptible de changement)
Jeudi 17 octobre 2013

Durée : 1 heure.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin à justifier les réponses aux exercices.

Exercice 1 **(4 points)** Indiquer (en justifiant) de quelle nature (convergente ou divergente) sont les séries suivantes :

$$\sum \cos\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad \sum \frac{n^5}{n^6+2}, \qquad \sum \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}, \qquad \sum \frac{(n!)^5}{(3n)!(2n)!}.$$

-(1 pt) $\frac{1}{n^2} \to 0$ donc $\cos \frac{1}{n^2} \to \cos(0) = 1$ donc $\sum \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$ diverge grossièrement.

-(1 pt) $\frac{n^5}{n^6+2} = \frac{n^5}{n^6(1+2/n^6)} \sim \frac{1}{n}$ comme les séries sont à termes positifs, $\sum \frac{n^5}{n^6+2}$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n}$ donc divergente (série harmonique).

-(0.5 limite +0.5 pt règle) Si $u_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$, $\sqrt[n]{u_n} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \exp(n^2\ln(1-\frac{1}{n^2})$. Or $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$ donc $\ln(1-\frac{1}{n^2}) \sim -\frac{1}{n^2}$ donc $n^2\ln(1-\frac{1}{n^2} \to -1$ et $\sqrt[n]{u_n} \to \exp(-1) < 1$ donc la règle de Cauchy dit que $\sum u_n$ converge.

-(0.5 limite +0.5 pt règle)Si $v_n = \frac{(n!)^5}{(3n)!(2n)!}$ alors $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^5}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{27.4} < 1$ donc la règle de d'Alembert dit que $\sum v_n$ converge.

Exercice 2 **(5 points)**

1. (1pt) Comme $|\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)\sqrt{n}}| \sim \frac{1}{\ln(n)n^{1/2}}$ qui est le terme d'une série divergente (Bertrand $\beta = 1, \alpha = 1/2 < 1$) donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)\sqrt{n}}$ n'est pas absolument convergente.
   (1pt) $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)\sqrt{n}}$ décroit (produit de deux suites décroissantes à termes positifs) et tend vers 0, donc par le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)\sqrt{n}}$ est convergente.
2. (1.5 pt) Le développement limité de $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3)$ donne $\sin(x) - x \sim_{x\to 0} x^3/6$ donc comme $\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)\sqrt{n}} \to 0$ on déduit par composition, $v_n = \left(\sin\left(\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{6}\frac{(-1)^{3n}}{\ln(n+1)^3 n^{3/2}}$
3. (1.5 pt) Comme v_n n'est pas positif, on ne peut pas appliquer la règle des équivalents (ATTENTION) mais l'équivalent implique $v_n = O(\frac{1}{\ln(n+1)^3 n^{3/2}})$ qui est le terme d'une série absolument convergente (Série de Bertrand $\alpha = 3/2$). Donc par la règle de comparaison, $\sum v_n$ converge, comme $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)\sqrt{n}}$ converge par (1),
   $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)\sqrt{n}}\right) = \sum v_n + \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)\sqrt{n}}$ converge par le critère de décomposition.

Exercice 3 **(6 points)** Soient les suites de fonctions suivantes définies sur $[0, \infty[$

$$f_n(x) = \frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-2nx}}, \qquad g_n(x) = \frac{nx^3}{nx^2+1}.$$

1. (1 pt :0,5 par limite) $f_n(0) = 0 \to 0$, si $x \neq 0$ $e^{-x} < 1$ donc $e^{-nx} \to 0$ et $f_n(x) \to 1$
La limite simple de f_n est donc la fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$, si $x > 0$.
(0,5 pt)$g_n(x) = \frac{nx^3}{nx^2+1} \sim \frac{nx^3}{nx^2} = x$ donc g_n converge simplement vers la fonction $g(x) = x$.
2. (1 pt) Les f_n sont continues et f n'est pas continue en 0 donc la limite des f_n n'est pas uniforme sur $[0, \infty[$.
(1 pt) $g_n(x) - x = \frac{nx^3 - nx^3 - x}{nx^2+1}$ donc $||g_n - g|| = \sup_{x \in [0,\infty[} \frac{x}{nx^2+1}$ Si $h(x) = \frac{x}{nx^2+1}$, $h'(x) = \frac{(nx^2+1) - 2nx^2}{(nx^2+1)^2}$, qui s'annule en $x = 1/\sqrt{n}$, h est d'abord croissante puis décroissante donc, on a trouvé le maximum et $||g_n - g|| = h(1/\sqrt{n}) = 1/2\sqrt{n} \to 0$ donc g_n converge uniformément vers g sur $[0, \infty[$.
3. (0,5 pt) Comme $[1, \infty[\subset [0, \infty[$, g_n converge uniformément vers g sur $[1, \infty[$.
(1 pt) $f_n(x) - 1 = \frac{-e^{-nx} - e^{-2nx}}{1 + e^{-2nx}}$ donc $||f_n - f||_{[1,\infty[} \leq e^{-n} + e^{-2n} \to 0$ (on majore le numérateur en 1 par décroissance, et minore le dénominateur par 1) donc f_n converge uniformément vers f sur $[1, \infty[$.
4. (1 pt) $g_n'(x) = \frac{3nx^2}{nx^2+1} - \frac{nx^3 2nx}{(nx^2+1)^2} \sim 3x^2/x^2 - 2x^4/x^4 = 1$ si $x \neq 0$ et $g_n'(0) = 0$ donc la limite simple n'est pas continue alors que g_n' continue donc g_n' ne converge pas uniformément sur $[0, \infty[$ (ou alternativement il suffit $g_n'(0) = 0$ ce n'est pas la dérivée $g'(0)$ donc la limite de la dérivée ne peut pas être uniforme. Car si la suite des dérivées converge uniformément et la fonction converge simplement, les dérivées convergent vers la dérivée de la limite simple.)