Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 Analyse pour l'Informatique — 2014-2015

Contrôle continu
Jeudi 9 octobre 2014

Durée : 1 heure.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin à justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours (5 minutes maxi, 5 points) :

1. Enoncer le critère des séries alternées.
2. Enoncer la règle des équivalents (sur les séries).
3. Enoncer le critère de décomposition (pour les sommes de séries).

Exercice 1 (7 points)

1. Trouver les limites :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+\ln(n)+2}{2n^6+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\tan(\frac{1}{n})}{\tan(\frac{3}{n})}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n.$$

2. Donner des équivalents asymptotiques (pour $n \to +\infty$) des suites :

$$u_n = \frac{n^2}{2n^4+1} - \ln(1+\frac{1}{n^2}) \quad \text{et} \quad v_n = \left(\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right).$$

3. Trouver les limites (pour $n \to +\infty$) des suites :

$$U_n = n^2 - n^3\sin(\frac{1}{n}), \qquad V_n = \frac{6n^4}{6n^2+1} - n^3\sin(\frac{1}{n}).$$

Exercice 2 (8 points) Indiquer (en justifiant) de quelle nature (convergente ou divergente) sont les séries suivantes :

$$\sum \left|\ln\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right|, \qquad \sum \frac{1}{n^2\ln(n)}, \qquad \sum \left(1-\frac{1}{2n^3}\right)^{n^4}, \qquad \sum \frac{n^2+1}{2n^3+n+1}.$$

$$\sum \frac{(n!)^6}{(2n)!(4n)!}, \qquad \sum(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}), \qquad \sum V_n.$$

(avec $V_n = \frac{6n^4}{6n^2+1} - n^3\sin(\frac{1}{n})$ comme à l'exercice 1).