Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 Analyse pour l'Informatique — 2014-2015

Contrôle continu 1 : Correction
Jeudi 9 octobre 2014

Exercice 1 (7 points)

1. -On a par croissance comparée usuelle $n^4+\ln(n)+2 = n^4(1+\frac{\ln(n)+2}{n^4}) \sim n^4$ et $2n^6+1 \sim 2n^6$ d'où
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+\ln(n)+2}{2n^6+1} = \lim \frac{n^4}{n^6} = 0$$
-Comme $\tan(x) \sim_{x\to 0} x$ et $1/n \to 0$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan(\frac{1}{n})}{\tan(\frac{3}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{n})}{(\frac{3}{n})} = \frac{1}{3}$$
-$\left(1-\frac{3}{n}\right)^n = \exp(n\ln(1-\frac{3}{n}))$. or $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$ donc $n\ln(1-\frac{3}{n}) \sim -3$ d'où
$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n = \exp(-3).$$

2. On a $\frac{n^2}{2n^4+1} = \frac{1}{2n^2(1+1/n^2)} = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ et $\ln(1+\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ donc on fait la somme des DL (et PAS DES EQUIVALENTS!) d'où : $\frac{n^2}{2n^4+1} - \ln(1+\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ donc
$$u_n = \frac{n^2}{2n^4+1} - \ln(1+\frac{1}{n^2}) \sim -\frac{1}{2n^2}$$
De plus $\ln(1+x) - x = -x^2/2 + o(x^2)$ pour $x \to 0$ donc
$$v_n = \left(\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right) \sim -(\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}})^2/2 \sim -\frac{1}{2n^3}.$$

3. On a pour $x = \frac{1}{n} \to 0$, $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3)$ donc
$$U_n = n^2 - n^3\sin(\frac{1}{n}) = n^2 - n^3[\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})] = \frac{1}{6} + o(1)$$
donc $\lim U_n = \frac{1}{6}$
Pour V_n on a aussi besoin du DL de
$$\begin{aligned}\frac{6n^4}{6n^2+1} = n^2\frac{1}{1+\frac{1}{6n^2}} &= n^2(1 - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{(6n^2)^2} + o(\frac{1}{n^4})) \\ &= n^2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{36n^2} + o(\frac{1}{n^2}))\end{aligned}$$
De même on a vu
$$n^3\sin(\frac{1}{n}) = n^3(\frac{1}{n}) - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{(5!)n^5} + o(\frac{1}{n^5}) = n^2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{(5!)n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

donc dans la différence les 2 premiers termes s'annulent (cela suffit pour la limite mais pas pour l'exo 2) :

$$V_n = \frac{6n^4}{6n^2+1} - n^3\sin(\frac{1}{n}) = \frac{1}{36n^2} - \frac{1}{(5!)n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{7}{360n^2} \to 0.$$

donc $\lim V_n = 0$.

Exercice 2 (8 points) Indiquons de quelle nature (convergente ou divergente) sont les séries suivantes :

- $\left|\ln\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right| \to \infty$ donc $\sum\left|\ln\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right|$ diverge.
- $\sum\frac{1}{n^2\ln(n)}$ converge comme série de Bertrand ($\alpha = 2 > 1, \beta = 1$)
- $\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{2n^3}\right)^{n^4}} = \exp(n^3\ln\left(1-\frac{1}{2n^3}\right)) \to \exp(-1/2) < 1$ donc $\sum\left(1-\frac{1}{2n^3}\right)^{n^4}$ converge par la règle de Cauchy.
- $\frac{n^2+1}{2n^3+n+1} \sim \frac{1}{2n} \geq 0$ donc par règle des équivalents et série harmonique $\sum\frac{n^2+1}{2n^3+n+1}$ diverge.
- pour $u_n = \frac{(n!)^6}{(2n)!(4n)!}$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^6}{(2n+2)(2n+1)(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} \to \frac{1}{2^2 4^4} < 1$$

  donc par d'Alembert $\sum\frac{(n!)^6}{(2n)!(4n)!}$ converge.
- $(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = \sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1) = \sqrt{n}(\frac{2}{2n}+o(1/n)) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$ donc par règle des équivalents et série de Riemann ($\alpha = 1/2$), $\sum(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$ diverge.
  On peut aussi dire $u_n = (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ est la somme de 2 séries télescopiques divergentes $\sqrt{n} \to \infty$. La règle de décomposition ne conclut pas mais la formule $\sum_{k=1}^n u_k = \sqrt{n+2}-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}-\sqrt{1} \to \infty$ pour les séries télescopiques conclut.
- $\sum V_n$. converge par règle des équivalents car par l'exo 1 $V_n \sim \frac{7}{360n^2} \geq 0$ et par la série de Riemann ($\alpha = 2$)