Université Claude Bernard
L2 Analyse pour l'Informatique

Mathématiques
2015-2016

Contrôle continu
Jeudi 15 octobre 2015

Durée : 1 heure.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin à justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours (5 minutes maxi, 5 points) :

1. Énoncer le critère de comparaison logarithmique.
2. Énoncer la règle de Cauchy pour les séries numériques.
3. Énoncer le critère des séries télescopiques.

Exercice 1 (5 points)

1. Trouver les limites :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+e^n+1}{2n^5+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\tan(\frac{2}{n^2})}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}.$$

2. Donner un équivalent asymptotique (pour $n \to +\infty$) de la suite :

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{n}{n+1}\right).$$

Exercice 2 (5 points) Indiquer (en justifiant) de quelle nature (convergente ou divergente) sont les séries suivantes :

$$\sum \sin\left(\frac{1}{n[\ln(n+2)]^2}\right), \qquad \sum \left(1-\frac{2}{n^2}\right)^{n^3}, \qquad \sum \frac{3n^5+n}{2n+1}.$$

$$\sum \frac{(3n)!n!}{((2n)!)^2}, \qquad \sum \left(1-\cos(\frac{1}{n})\right)^n.$$

Exercice 3 (5 points)

1. Soit la suite définie par récurrence par $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$, $v_0 = v_1 = 1$. Trouver

$$\lim_{n\to\infty} v_n.$$

[Indication : On pourra calculer la valeur de v_n explicitement ou montrer une inégalité avec une suite simple]

2. Soit la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = x_n\sqrt{1+\frac{1}{x_n}}$ et $x_0 = 1$.

Montrer que $x_n > 0$ et que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ puis trouver la limite :

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n$$