Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 Analyse et Probabilités pour l'Informatique — 2013-2014

Contrôle continu
Jeudi 21 novembre 2013

Durée : 1 heure.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours (5 minutes maxi, 5 points) :

1. Enoncer le théorème de dérivation des séries entières.
2. Donner un critère de convergence normale d'une série trigonométrique.
3. Donner la formule de Poincaré (aussi appelée principe d'inclusion-exclusion ou formule du crible) pour le cardinal de l'union de n ensembles, dans le cas général et le cas particulier $n = 3$

Exercice 1 (6 points) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π- périodique paire définie par

$$f(t) = t^2 - \frac{\pi^2}{4} \text{ si } t \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad f(t) = \frac{\pi^2}{4} - (t-\pi)^2 \text{ si } t \in]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}].$$

1. Est-ce que la série de Fourier de f converge simplement ? Converge-t-elle normalement ? Quelle est la limite de la série de Fourier de f ?
2. Calculer la série de Fourier de f.
3. En déduire que $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} = \frac{\pi^6}{15\times 64}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} = \frac{\pi^6}{15\times 63}$.

Exercice 2 (6 points)

1. Calculer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2. Quelle est la somme $S(z)$ de la deuxième série ci-dessus ?
3. En déduire la série de Fourier de $g(x) = sh(cos(x))\cos(\sin(x))$. (Montrer que $g(x) = \mathrm{Re}(S(e^{ix}))$).
4. La série de fonction $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{-(2n+1)x}$ converge-t-elle simplement ? normalement sur $[\ln(2), \infty[$?

Exercice 3 (5 points)

1. Combien peut on construire de mots de passes en utilisant exactement 10 lettres majuscules (parmi les 26 lettres).
2. Combien peut on construire de mots de passes en utilisant exactement 4 lettres majuscules (parmi les 26 lettres) et 6 chiffres (parmi les 10 chiffres de base).
3. Calculer le nombre de mots que l'on peut fabriquer avec les lettres du mot CONSTITUTION (en utilisant toutes les lettres, exactement le même nombre de fois sans importance de l'existence du mot dans aucune langue).
4. Calculer la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k.$$