Université Claude Bernard
L2 Analyse et Probabilités pour l'Informatique

Mathématiques
2013-2014

Correction du Contrôle continu
Jeudi 21 novembre 2013

Exercice 1 (6 points) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π- périodique paire définie par $f(t) = t^2 - \frac{\pi^2}{4}$ si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(t) = \frac{\pi^2}{4} - (t-\pi)^2$ si $t \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$.

1. f est C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ donc f est C^1 par morceau et continue (car $f(\frac{\pi}{2}-) = f(\frac{\pi}{2}+) = 0$, la continuité en 0 et π sont évidentes par parité, cela donne la continuité à tous les points de transition), donc sa série de Fourier converge normalement vers f.
2. Calculons la série de Fourier de f.
   f est paire donc $b_n(f) = 0$ f est C^1 (cf plus loin pour la continuité des dérivées) donc $b_n(f') = -na_n(f)$. Ici $f'(t) = 2t$ si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(t) = 2(\pi - t)$ si $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ et est impaire comme dérivée d'une fonction paire. Comme $f'(t) \to_{t\to\frac{\pi}{2}} = \pi = f'(\frac{\pi}{2})$, f' est de nouveau C^1 par morceau et continue, donc $a_n(f'') = nb_n(f')$ et donc $a_n(f'') = -n^2 a_n(f)$.
   Ici $f''(t) = 2$ si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f''(t) = -2$ si $t \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$, et f'' est paire, donc on calcule pour $n \neq 0$
   $$\begin{aligned} a_n(f'') = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f''(t)\cos(nt)dt &= \frac{4}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nt)dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(nt)dt\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\left([\frac{\sin(nt)}{n}]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\frac{\sin(nt)}{n}]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \frac{8\sin(n\frac{\pi}{2})}{n\pi}. \end{aligned}$$
   Il reste à calculer $a_0(f) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(t)dt + \int_{\pi/2}^{\pi} f(t)dt\right) = 0$ par symétrie par rapport à $\pi/2$
   La série de Fourier de f est donc :
   $$S(f) : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}8}{\pi(2k+1)^3}\cos((2k+1)x)$$
3. En évaluant en $x = 0$ on obtient
   $$f(0) = -\frac{\pi^2}{4} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 8}{\pi(2k+1)^3}$$
   d'où le résultat :
   $$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32},$$
   Il reste à appliquer l'égalité de Parseval pour la deuxième somme
   $$\begin{aligned} \frac{64}{2\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^6} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(t^2 - \frac{\pi^2}{4})^2dt \\ &= \frac{2}{\pi}[\frac{t^5}{5} + \frac{\pi^4 t}{16} - \frac{2\pi^2 t^3}{12}]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{\pi}[\frac{\pi^5}{5.2^5} + \frac{\pi^5}{2^5} - \frac{2\pi^5}{3.2^5}] \end{aligned}$$

On déduit donc :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} = \frac{\pi^6}{2^9}[\frac{1}{5}+1-\frac{2}{3}] = \frac{\pi^6}{2^9}[\frac{3+15-10}{15}] = \frac{\pi^6}{15.2^6}.$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^6} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} = \left(1-\frac{1}{2^6}\right)^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} = \frac{\pi^6}{15.63}$$

Exercice 2 (6 points)

1. Calculons le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On considère la variable $x = z^2$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ a rayon de convergence $\frac{1}{2}$ (série géométrique) donc converge pour $|x| < 1/2$ et diverge pour $|x| > 1/2$ donc de même pour la série initiale converge pour $|z|^2 < 1/2$ et diverge si $|z|^2 > 1/2$ donc le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n+1}$ est $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour la deuxième série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$, $a_n/a_{n+1} = (2n+3)(2n+2) \to \infty$ donc d'Alembert indique que $R = \infty$ donc de même le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ est $R = \infty$.
2. Par le cours $S(z) = sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$.
3. Déduisons la série de Fourier de $g(x) = sh(cos(x)) \cos(\sin(x))$. Par les identités trigonométriques $sh(a+b) = sh(a)ch(b) + ch(a)sh(b)$ on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(sh(e^{ix})) &= Re(sh(\cos(x)+i\sin(x))) = \mathrm{Re}(sh(cos(x))ch(i\sin(x) + ch(cos(x))sh(i\sin(x)) \\ &= \mathrm{Re}(sh(cos(x))cos(\sin(x)) + ch(cos(x))i\sin(\sin(x))) = sh(\cos(x))\cos(\sin(x)) = g(x).\end{aligned}$$

Comme la deuxième série a rayon de convergence infinie, on déduit :
$g(x) = \mathrm{Re}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{ix(2n+1)}}{(2n+1)!}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)!}$. C'est la série de Fourier de g.
4. La première série entière converge normalement sur $z \in [0, 1/2] \subset]-R, R[$ donc la série de fonction $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{-(2n+1)x}$ correspondant à $z = e^{-x}$ converge normalement sur l'intervalle image $[\ln(2), \infty[$ donc aussi simplement.

Exercice 3 (5 points)

1. On peut construire de 26^{10} mots de passe en utilisant exactement 10 lettres majuscules (parmi les 26 lettres).
2. On peut construire $26^4 \times 10^6 \times C_{10}^6$ mots de passe en utilisant exactement 4 lettres majuscules (parmi les 26 lettres) et 6 chiffres (parmi les 10 chiffres de bases). Le C_{10}^6 correspondant au choix de la position des chiffres ou des lettres.
3. Le nombre de mots que l'on peut fabriquer avec les lettres du mot CONSTITUTION est celui d'arrangements avec répétition d'ordre (1,2,2,3,1,2,1) (pour (1C,2O,2N,3T, 1S,2I,1U)) soit $\frac{12!}{(2!)^3 3!}$.
4.

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k x^{k-2} = (\frac{d}{dx})^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (\frac{d}{dx})^2 (1+x)^n = n(n-1)(1+x)^{n-2}.$$

En évaluant en $x = 1$ on obtient $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k = n(n-1)2^{n-2}$.