Université Claude Bernard — Mathématiques

L2 Analyse et Probabilités pour l'Informatique — 2014-2015

Contrôle continu
Jeudi 6 novembre 2014

Durée : 1 heure.

Les documents et les calculatrices sont interdits.

On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours (5 minutes maxi, 5 points) :

1. Donner la formule du nombre de combinaisons de longueur p AVEC répétition de n objets.
2. Donner la formule du nombre d'arrangements de longueur p AVEC répétition de n objets $\{a_1, ..., a_n\}$ d'ordre $(r_1, ..., r_n)$ avec $r_1 + ... + r_n = p$.
3. Donner la formule du nombre d'applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.
4. Enoncer la formule du binôme de Newton.

Exercice 1 (4 points) Les 3 séries suivantes sont elles absolument convergentes ? convergentes ? (justifier en utilisant des critères de cours)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} (-1)^n(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}), \quad \sum_{n\geq 2} \left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)\right).$$

Exercice 2 (6 points)

1. Calculer (en justifiant) le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+1} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!} z^n \quad , \sum_{n=0}^{\infty} nz^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 8^n z^{3n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

2. Calculer les sommes des trois séries ci-dessous ? (dont on a déjà calculé le rayon de convergence avant.)

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n, \quad T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 8^n z^{3n+1}, \quad U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Exercice 3 (5 points) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π- périodique paire définie par

$$f(t) = 1 \text{ si } t \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad f(t) = -1 \text{ si } t \in]\frac{\pi}{2}, \pi].$$

1. Quelle est la limite de la série de Fourier de f ? (justifier en utilisant un théorème du cours)
2. Calculer la série de Fourier de f.
3. Enoncer la formule de Parseval.
4. En déduire que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4} \text{ et } \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$