Université Claude Bernard — Mathématiques

L2 Analyse et Probabilités pour l'Informatique — 2014-2015

Correction Contrôle continu 2
Jeudi 6 novembre 2014

Question de Cours (5 points) :

1. Donner la formule du nombre de combinaisons de longueur p AVEC répétition de n objets. $K_n^p = \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!p!}$
2. Donner la formule du nombre d'arrangements de longueur p AVEC répétition de n objets $\{a_1, ..., a_n\}$ d'ordre $(r_1, ..., r_n)$ avec $r_1 + ... + r_n = p$. $\frac{p!}{r_1!...r_n!}$
3. Donner la formule du nombre d'applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments : n^p
4. Enoncer la formule du binôme de Newton. $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}$

Exercice 1 (4 points) Les 3 séries suivantes sont elles absolument convergentes ? convergentes ? (justifier en utilisant des critères de cours)

-$|\frac{(-1)^n}{n^2}|\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha = 2 > 1$ donc par critère de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

-$|(-1)^n(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})| = a_n = (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) = \frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} \sim \frac{3}{2\sqrt{n}} \to 0$ Comme $\alpha = 1/2 < 1$, par le critère de Riemann $\sum_{n\geq 1}(-1)^n(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$ n'est pas absolument convergente.

Mais $a_n \to 0$ et a_n décroissante car $n \mapsto \sqrt{n+3} + \sqrt{n}$ est croissante, donc par le critère des séries alternées s'applique à $(-1)^n a_n$ donc $\sum_{n\geq 1}(-1)^n(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$ est convergente.

-$|\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)| \sim \frac{1}{n}$ qui diverge (série harmonique ou Riemann $\alpha = 1$), donc par le critère des équivalents (appliqué à une série à terme POSITIF), donc $\sum_{n\geq 2}\left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)\right)$ n'est PAS absolument convergente.

Mais on fait un DL de $ln(1 + x) = x - x^2/2 + o(x^2)$ pour $x = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$, donc on a

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée avec $1/n \to 0$ en décroissant donc convergente. $v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - \frac{(-1)^n}{n} \sim \frac{-1}{2n^2}$, donc $\sum v_n$ est absolument convergente par le critère de Riemann. Par le critère de décomposition, $\sum_{n\geq 2}\left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)\right)$ est donc convergente comme somme de séries convergentes.

Exercice 2 (6 points)

1. Calculons (en justifiant) le rayon de convergence des séries entières suivantes : -Si $a_n = \frac{n^2+3}{n^3+1}$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} \sim \frac{n^5}{n^5} \to 1$ donc par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^\infty \frac{n^2+3}{n^3+1} z^n$ est $R = 1$.
   -Si $a_n = \frac{n!}{(2n+1)!}$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n+3)(2n+2)}{n+1} \sim 4n \to_{n\to\infty} \infty$ donc par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{(2n+1)!} z^n$ est $R = \infty$.
   -Pour $a_n = n$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} \sim 1$ donc le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^\infty n z^n$, est $R = 1$.

-Pour $\sum_{n=0}^{\infty} 8^n z^{3n+1}$, on pose $x = z^3$ pour la série $\sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n$, $\sqrt{n}8^n \to 8$ la formule d'Hadamard donne rayon de convergence $1/8$ donc la série converge pour $|x| < 1/8$ et diverge pou $|x| > 1/8$ donc pour $|z| < 1/2$ la série $z\sum_{n=0}^{\infty} 8^n z^{3n}$ converge et elle diverge pour $|z| > 1/2$. Son rayon de convergence est donc $R = 1/2$.
-C'est du cours $R = \infty$ pour la série$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ du cosinus hyperbolique.

2. Calculons les sommes des trois séries ci-dessous ? (dont on a déjà calculé le rayon de convergence avant.) on a $U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = ch(z)$ cf cours.
   POur S on dérive la série géométrique sur son rayon de convergence :
$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n = z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2},$$
   Pour T après le même changement de variable qu'à la question précédente, c'est la série géométrique :
$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 8^n z^{3n+1} = z\sum_{n=0}^{\infty}(8z^3)^n = \frac{z}{1-8z^3}.$$

Exercice 3 (5 points) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π- périodique paire définie par
$$f(t) = 1 \text{ si } t \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad f(t) = -1 \text{ si } t \in]\frac{\pi}{2}, \pi].$$

1. f est dérivable par morceau, donc par le Thm de Dirichlet la série de Fourier de F converge vers sa réularisée $\tilde{f}(x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$ elle est égale à f sauf $\tilde{f}(\pi/2) = 0$.
2. Calculons la série de Fourier de f. Comme f est paire $b_n(f) = 0$ et $a_0(f) = 0$ car $f(t - \pi/2)$ est impaire donc d'intégrale nulle, et pour $n \neq 0$,
$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(\omega nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(\omega nt)dt - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(\omega nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}[\frac{\sin(nt)}{n}]_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi}[\frac{\sin(nt)}{n}]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{4}{\pi}\frac{\sin(n\pi/2)}{n} \end{aligned}$$
   car $\sin(n\pi) = 0$. De plus on a $\sin((2k+1)\pi/2) = (-1)^k$ d'où la série de Fourier
$$S(f) : \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos((2k+1)x)}{2k+1},$$
3. Formule de Parseval cf cours.
4. En évaluant en 0, la série donne $f(0) = 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos((2k+1)0)}{2k+1}$ d'où $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4}$. Par Parseval, on a :
$$\frac{4^2}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt = 1.$$
   d'où $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$,
   Enfin en séparant termes pairs et impairs :
$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{S}{4} = \frac{3}{4}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$