Université Claude Bernard
L2 Analyse et Probabilités pour l'Informatique

Mathématiques
2015-2016

Contrôle continu
Jeudi 5 novembre 2015

Durée : 1 heure.

Les documents de toute sorte, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours (5 minutes maxi, 5 points) :

1. Donner la formule du nombre de combinaisons de longueur p parmi n objets (SANS répétition).
2. Donner la formule du nombre d'arrangements de longueur p AVEC répétition de n objets $\{a_1, ..., a_n\}$ d'ordre $(r_1, ..., r_n)$ avec $r_1 + ... + r_n = p$.
3. Donner la formule du nombre total d'arrangements de longueur p AVEC répétition de n objets $\{a_1, ..., a_n\}$ (l'ordre n'étant pas fixé).
4. Donner la formule de Poincaré (aussi appelée principe d'inclusion-exclusion ou formule du crible) pour le cardinal de l'union de n ensembles, dans le cas général et le cas particulier $n = 3$

Exercice 1 (5 points) Les 2 séries suivantes sont elles absolument convergentes ? convergentes ? (justifier en utilisant des critères de cours)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n\geq 2} \left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)}\right)\right).$$

Exercice 2 (5 points)

1. Calculer (en justifiant) le rayon de convergence des 4 séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n+1)!} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^5+3} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^{2n+1}.$$

2. Calculer les sommes des deux séries ci-dessous (sur leur intervalle de convergence) ? (dont on a déjà calculé le rayon de convergence avant.)

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^{2n+1}.$$

Exercice 3 (5 points) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π- périodique impaire définie par

$$f(t) = t \quad \text{si } t \in [-\pi, \pi[.$$

1. Quelle est la limite de la série de Fourier de f ? (justifier en utilisant un théorème du cours). On précisera la valeur explicite de cette limite en $t = \pi$.
2. Calculer la série de Fourier de f.
3. Énoncer la formule de Parseval.
4. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$