Université Claude Bernard | Mathématiques
L2 Analyse et Probabilités pour l'Informatique | 2015-2016

Correction Contrôle continu 2
Jeudi 5 novembre 2015

Question de Cours (5 points) :cf cours.

Exercice 1 (5 points) Les 2 séries suivantes sont elles absolument convergentes ? convergentes ? (justifier en utilisant des critères de cours)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n\geq 2} \left(\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} \right) \right).$$

• $|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}| = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha = 1/2 < 1$ donc par critère de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas absolument convergente. Par contre $a_n = 1/\sqrt{n}$ est décroissante et tend vers 0 donc par le critère spécial des séries alternées (CSSA), $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

• $|\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} \right)| \sim \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ (car $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$) qui est le terme générale d'une série divergente (série de Bertrand $\alpha = 1/2 < 1, \beta = 1$), donc par le critère des équivalents (appliqué à une série à terme POSITIF), donc $\sum_{n\geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} \right)$ n'est PAS absolument convergente.

Mais on fait un DL de $ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$ pour $x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} \to 0$, donc on a

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} - \frac{1}{2n\ln(n)^2} + o(\frac{1}{n\ln(n)^2})$$

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)}$ est une série alternée avec $1/\sqrt{n}\ln(n) \to 0$ en décroissant (son inverse est croissante comme produit des suites croissantes $(\sqrt{n})$ et $(\ln(n))$) donc par le CSSA $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)}$ est convergente.

$$v_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} \right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} \sim \frac{-1}{2n\ln(n)^2},$$

donc $\sum v_n$ est absolument convergente car $-v_n = |v_n|$ à terme positif et par le critère des équivalents et les séries de Bertrand $\alpha = 1, \beta = 2 > 1$ (cas de série de Bertrand convergente). Par le critère de décomposition,

$$\sum_{n\geq 2} \left(\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} \right) \right) = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} + v_n$$

est donc convergente comme somme de séries convergentes.

Exercice 2 (5 points)

1. Calculer (en justifiant) le rayon de convergence des 4 séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n+1)!} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^5+3} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^{2n+1}.$$

• Si $a_n = \frac{(2n)!}{(3n+1)!}$,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n)!(3n+4)!}{(3n+1)!(2n+2)!} = \frac{(3n+4)(3n+3)(3n+2)}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{27n^3}{4n^2} \to \infty$$

donc par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n+1)!} z^n$ est $R = +\infty$.

• Si $a_n = \frac{n^3+2}{n^5+3} \sim \frac{1}{n^2}$, on a $\frac{a_n}{a_{n+1}} \sim \frac{(n+1)^2}{n^2} \to 1$ donc par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^5+3} z^n$ est $R = 1$.

• On a vu en cours $R = 1$ pour $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. On peut aussi retrouver $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)}{n} \to 1$.

• Pour $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^{2n+1}$, on pose $x = z^2$ pour la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^2 2^{n+1}}{2^n (n+1)^2} \to 2$ donc par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$ est $R = 2$ donc la série converge pour $|x| < 2$ et diverge pour $|x| > 2$ ce qui correspond en z avec $x = z^2$ à une convergence pour $|z| < \sqrt{2}$ et une divergence pour $|z| > \sqrt{2}$. On conclut donc que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^{2n+1}$ a pour rayon de convergence $R = \sqrt{2}$.

2. On a vu en cours $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$
   Pour la deuxième série, on pose $X = z^2/2$ de sorte que en utilisant la dérivation comme en TD :
$$T(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} n^2 X^n = zX \frac{d}{dX} \left(X \frac{d}{dX} \sum_{n=0}^{\infty} X^n \right) = zX \frac{d}{dX} \left(X \frac{d}{dX} \frac{1}{1-X} \right)$$
   Il ne reste plus qu'à calculer les dérivées et remplacer $X = z^2/2$:
$$T(z) = zX \frac{d}{dX} \left(X \frac{1}{(1-X)^2} \right) = z \frac{2X^2}{(1-X)^3} + z \frac{X}{(1-X)^2} = \frac{4z^5}{(2-z^2)^3} + \frac{2z^3}{(2-z^2)^2}$$

Exercice 3 (5 points) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π- périodique impaire définie par $f(t) = t$ si $t \in [-\pi, \pi[$.

1. f est dérivable par morceau, donc par le Thm de Dirichlet la série de Fourier de f converge vers sa régularisée $\tilde{f}(x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$ elle est égale à f sur $]-\pi, \pi[$ (par continuité) mais $\tilde{f}(\pi) = 0$ car la limite à droite $f(\pi+) = \lim_{t \to O^+} f(-\pi + t) = \lim_{t \to O^+} (-\pi + t) = -\pi$ (par périodicité) et la limite à gauche $f(\pi-) = \lim_{t \to O^-} f(\pi + t) \lim_{t \to O^-} (\pi + t) = \pi$
2. Calculons la série de Fourier de f. (cf ex 19 du cours) Comme f est impaire $a_n(f) = 0$ et
$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} [\frac{-t\cos(nt)}{n}]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n} dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$
   (l'intégration par partie avec $u = t, v' = \sin(nt), u' = 1, v = \frac{-\cos(nt)}{n}$] et on utilise $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n} dt = [\frac{\sin(nt)}{n^2}]_0^{\pi} = 0$ car $\sin(n\pi) = 0$] d'où la série de Fourier
$$S(f) : 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n},$$
3. Formule de Parseval cf cours.
4. Par Parseval on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ par le calcul suivant :
$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}.$$
   Enfin en séparant termes pairs et impairs :
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{S}{4} = \frac{3}{4} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
   Donc on a le second résultat :$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.