Université Claude Bernard
L2 Analyse et Probabilités pour l'Informatique

Mathématiques
2013-2014

Correction du Contrôle continu 3

Exercice 1 (4 points)

1. On choisit au hasard un mot de passe de 6 lettres et 4 chiffres (ex : AA12BB3CC3), quelle est la probabilité que les lettres et les chiffres du mot de passe soient tous distincts (ex : AB12CD3E4F) ?
   L'ensemble des suite de 6 lettres et 4 chiffres Ω vériie $Card(\Omega) = 26^6 10^4 C_{10}^4$ (26^6 choix des 6 lettres (nombre d'arrangement avec répétition de 26 objets de longueur 6), 10^4 choix des 4 chiffres et C_{10}^4 choix de l'ordre des chiffres. Si A est l'ensemble des mots de passes avec lettres et chiffres distincts, $Card(A) = A_{26}^6 A_{10}^4 C_{10}^4$. On passe des arrangements avec répétition aux arrangements sans répétition.
   D'où, pour la probabilité uniforme :
   $$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{26.25.24.23.22.21}{26^6}\frac{10.9.8.7}{10^4}.$$
2. Une urne contient 5 boules rouges numérotées de 1 à 5 et 6 boules vertes numérotées de 1 à 6. Ω est l'ensemble des parties à 4 élément des 11 boules $\Omega = \mathcal{P}_4([\![1, 11]\!]$. On tire simultanément 4 boules au hasard. Pour avoir trois boules rouges (évènement A) , il faut prendre une partie à 3 éléments parmi les 5 rouges et une partie à 1 éléments parmi les 6 vertes soit $Card(A) = C_5^3 C_6^1 = (5.4.3/6).6 = 60$ D'où pour la probabilité uniforme :
   $$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{60}{C_{11}^4} = \frac{60.24}{11.10.9.8} = \frac{60.24}{11.10.9.8} = \frac{2}{11}.$$

Exercice 2 (7 points)

1. On lance au hasard cinq fois, de façon indépendante, un dé équilibré. $\Omega = [\![1, 6]\!]^5$
2. On note S_i avoir un 6 au lancer i et A_i avoir le premier 6 au i-ème lancer. $A_4 = S_1^c \cap S_2^c \cap S_3^c \cap S_4$. Par indépendacne :
   $$P(A_4) = P(S_1^c)P(S_2^c)P(S_3^c)P(S_4) = (\frac{5}{6})^3 \frac{1}{6}.$$
3. la probabilité d'obtenir le premier 6 lors d'un lancer pair est la probabilité de $A_2 \cup A_4$ union d'évènements disjoints donc de probabilité :
   $$P(A_2) + P(A_4) = (\frac{5}{6})\frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^3 \frac{1}{6}.$$
4. SOit l'évènement obtenir des points tous différents. Le nombre de réalisations acceptable est 6! (le nombre de permutations des points, le dernier étant fixé par le tirage des 5) d'où $P(D) = \frac{6!}{6^5}$.
   L'évènement avoir un six est noté $S = S_1 \cup ... \cup S_5$.
   On cherche $P(D \cap S) = \sum_i P(S_i \cap S)$, par union disjointe. $P(S_i \cap S) = \frac{5!}{6^5}$ (une fois fixé le 6 on a une permutation des 5 autres chiffres, le dernier étant fixé par les autres) d'où $P(D \cap S) = 5\frac{5!}{6^5}$
   Finalement, la probabilité conditionnelle est :
   $$P(S|D) = \frac{P(D \cap S)}{P(D)} = 5\frac{5!}{6^5}\frac{6^5}{6!} = \frac{5}{6}$$

5. Calculons la probabilité que la somme des points des faces obtenues soit supérieur ou égale à 18 sachant qu'un seul des dés a amené 3.
Soit A l'évènement "un seul des dés a amené 3". Pour obtenir ce cas, il faut positionner le 3 (5 places), obtenir un 3 à cet endroit (1/6) et autre chose qu'un 3 ailleurs. Formellement SOit T_i obtenir un 3 à l'indice i on a donc $A = \cup_{i=1}^5 T_i \cap \bigcap_{j\neq i} T_j^c$ Par union disjointe puis indépendance, on obtient :
$$P(A) = \sum_{i=1}^{5} P(T_i \cap \bigcap_{j\neq i} T_j^c) = \sum_{i=1}^{5} P(T_i) \prod_{j\neq i} P(T_j^c) = 5\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^4 = (\frac{5}{6})^5.$$
Soit T_{18} l'évènement "la somme des faces est au moins 18", $S = T_{18} \cap A$. On ne peut pas avoir plus de deux ≤ 2 et plus de un 1 (à partir de 3 ou 2, on a au plus $2.3 + 3 + 6 = 15$ et $2.1 + 3 + 2.6 = 17$) Soit donc D_i avoir exactement deux i et U_i avoir exactement un i, T_i exactement 3 i, et A_i n'avoir aucun i. On a donc montré
$$S = (S \cap D_2) \cup (S \cap U_1 \cap U_2) \cup (S \cap U_1 \cap A_2) \cup (S \cap A_1 \cap U_2) \cup (S \cap A_1 \cap A_2).$$
Si on a deux 2 il faut que les deux derniers dés donne plus de $18 - 2.2 - 3 = 11$ on peut donc avoir deux 6 ou un 5 et un 6
$$P(S \cap D_2) = P(D_2 \cap U_3 \cap U_6 \cap U_5) + P(D_2 \cap U_3 \cap D_6) = \frac{5!}{2!6^5} + \frac{5!}{(2!)^2 6^5}$$
en utilisant les arrangements avec répétition pour compter les cas une fois fixé toutes les sorties. De même $P(S\cap U_1\cap U_2) = P(U_1\cap U_2\cap U_3\cap D_6) = \frac{5!}{2!6^5}$. Si tous les 4 autres lancés sont au moins 4, on obtient au moins $4\times 4+3 = 19$ donc $P(S\cap A_1\cap A_2) = P(A_1\cap A_2\cap U_3) = 5\times \frac{3^4}{6^5}$ (on positionne le 3 et il reste les autres ≥ 4 à choisir). Si on a un 1 ou un 2 et que tous les entiers sont inférieurs à 4, on obtient au plus $3.4+2+3 = 17$, donc si on a un 2 il faut au moins un 5 ou un 6 et dans le cas ou on a un 1 il faut au moins deux ≥ 5 ou un 6 (seul cas si on a deux 4) donc $(S\cap A_1\cap U_2) = (A_1\cap U_2\cap U_3\cap T_4^c)$ et $(S\cap A_2\cap U_1) = (A_2\cap U_1\cap U_3\cap D_4\cap U_6)\cup(A_2\cap U_1\cap U_3\cap(D_4\cup T_4)^c)$. d'où $P(S\cap A_1\cap U_2) = P(A_1\cap U_2\cap U_3) - P(A_1\cap U_2\cap U_3\cap T_4) = \frac{5.4.3^3}{6^5} - \frac{5!}{3!6^5}$ (pour le premier 5 places du 2 puis 4 du 3 et les 3^3 chiffres restant). De même $P(S\cap A_2\cap U_1) = \frac{5!}{2!6^5} + \frac{5.4.(3^3-1)}{6^5} - 2\frac{5!}{2!6^5}$. Bilan : $P(T_{18}|A) = \frac{P(S)}{P(A)} = 2\frac{5!}{2!5^5} + \frac{5!}{(2!)^2 5^5} + 5\times\frac{3^4}{5^5} + 2\frac{5.4.(3^3-1)}{5^5} - \frac{5!}{2!5^5} = \frac{4\times 2(3^3-1)+3^4+4.3+3.2}{5^4} = \frac{307}{625} = 0,4912.$

Exercice 3 (4 points) Une compagnie d'assurance répartit ses clients en deux classes de risques R1 et R2 : les bons risques et les mauvais risques. Les effectifs des ces deux classes représentent 25% de la population totale pour la classe R1, et 75% pour R2. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accrochage au cours de l'année pour une personne de l'une de ces deux classes sont respectivement de 0,1 et 0,30.

1. Par la formule des probabilités totales, la probabilité d'avoir un accident est
$$P(A) = P(A|R_1)P(R_1) + P(A|R_2)P(R_2) = 0,25\times 0,1 + 0,75\times 0,3 = 0,25\times(0,1+0,9) = 0,25.$$
2. Formule de Bayes (cf cours) dans le cas présent
$$P(R_1|A) = \frac{P(A|R_1)P(R_1)}{P(A|R_1)P(R_1) + P(A|R_2)P(R_2)}.$$
3. Par la question précédente, on obtient :
$$P(R_1|A) = \frac{0,25\times 0,1}{0,25\times 0,1 + 0,75\times 0,3} = 0,1.$$