Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 Analyse pour l'Informatique — 2014-2015

Correction du Contrôle continu 3

Exercice 1 (8 points)

1. **0,5 points** Combien peut on contruire de mots de passes en utilisant exactement 8 chiffres distincts (parmi les 10 chiffres) ? Les mots de passes sont des suites ordonnés et si les chiffres sont distincts, ce sont des arrangements sans répétitions de longuer $p = 8$ pris parmi $n = 10$ objets, leur nombre est donc $A_{10}^8 = \frac{10!}{2}$.
2. **1.5 points** Combien peut on contruire de mots de passes en utilisant exactement 4 lettres majuscules (parmi les 26 lettres, non nécessairement distincts) et 4 chiffres DISTINCTS (parmi les 10 chiffres de bases) ? (Ex : AA1B64B8) Il y a 26^4 choix de lettres (arrangements avec répétitions) et comme au dessus $A_{10}^4 = 10.9.8.7$ choix de chiffres. Enfin il y a $C_8^4 = \frac{8!}{(4!)^2}$ choix des positions des chiffres. Réponse finale : :
$$26^4 C_8^4 A_{10}^4 = 10.9.8.7.26^4.\frac{8!}{(4!)^2}$$
3. **1 point**Calculons le nombre de mots que l'on peut fabriquer avec les lettres du mot INFORMATION (en utilisant toutes les lettres, exactement le même nombre de fois sans importance de l'existence du mot dans aucune langue). Il s'agit d'un arrangement avec répétition de 2I, 2N, 20, 1 R, 1F, 1 M, 1A, 1T (total 11 lettres) soit d'après le cours :
$$\frac{11!}{(2!)^3(1!)^5} = \frac{11!}{8}.$$
4. **1,5 points** Une urne contient 10 boules rouges numérotées de 1 à 10 et 5 boules vertes numérotées de 1 à 5. On tire SIMULTANÉMENT 5 boules. Déterminons le nombre de tirage qui fournissent exactement 3 boules rouges. Le tirage est simultané, il est donc constitué d'un ensemble (soit d'une combinaison) de 3 boules rouges parmi les 10 soit $C_{10}^3 = \frac{10!}{(3!)(7!)}$ choix et d'un ensemble de 2 boules vertes parmi les 5 soit $C_5^2 = \frac{5!}{(2!)(3!)}$, total :
$$\frac{5!}{(2!)(3!)}\frac{10!}{(3!)(7!)} = \frac{10!}{7.6(2!)(3!)^2} = \frac{10!}{7.6^3.2}.$$
5. **1,5 points** Combien peut on contruire de mots de passes en utilisant 8 chiffres (parmi les 10 chiffres) dont au moins un nombre impair ? (Ex : 14582397) On peut construire 10^8 mot de passe en tout et 5^8 avec seulement des nombres pairs, donc le complémentaire, ceux obtenus avec au moins un nombre impair sont en nombre $10^8 - 5^8$.
6. **2 points** Calculons la somme $\sum_{k=0}^n k2^k C_n^k$ en l'exprimant comme une dérivée
$$\sum_{k=0}^n kx^k C_n^k = x\sum_{k=0}^n kx^{k-1}C_n^k = x\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^n x^k C_n^k = x\frac{d}{dx}(1+x)^n = xn(1+x)^{n-1}$$
L'avant dernière identité vient de la formle du binôme. En évaluant en $x = 2$, on obtient :
$$\sum_{k=0}^n k2^k C_n^k = 2n3^{n-1}.$$

Exercice 2 (7 points) On choisit au hasard un mot de passe de 8 chiffres (non nécessairement distincts parmi les 10 chiffres, ex : 14491307).

1. **0,5 points** L'espace des réalisations est $\Omega = [0,9]^8$ car les mots de passes sont ordonnés avec répétition. Comme le tirage est au hasard, on munit Ω de la probabilité uniforme.
2. **1 point** L'ensemble des chiffres distincts A a cardinal $A_{10}^8 = \frac{10!}{2}$. (cf exo 1) donc
$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{A_{10}^8}{10^8} = \frac{9}{10} \times ... \times \frac{3}{10}.$$
3. **1 points**L'ensemble B des mots de passes dont le premier 1 du mot de passe soit le 3ème caractère est l'ensemble des mots $B = ([0,9] - \{1\})^2 \times \{1\} \times [0,9]^5$ commençant par 2 chiffres autres que 1 puis un 1 puis n'importe quel chiffre. Donc :
$$P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{9^2.1.10^5}{10^8} = \frac{81}{1000}.$$
4. **1 point** Calculons la probabilité que le premier 1 du mot de passe soit le 3ème caractère sachant que tous les chiffres sont distincts ? C'est $P(B|A)$ avec les notations des deux premières questions. Il reste à calculer $Card(A \cap B)$, Cela revient à choisir 7 caractères distincts de 1 et distincts entre eux soit A_{10}^7 choix (et ajouter le 1 en troisième position dans la suite ordonnée) donc :
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)} = \frac{A_{10}^7}{A_{10}^8} = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}.$$
5. **3,5 points**Calculons la probabilité d'obtenir (au moins) 2 uns consécutifs $P(C)$. On cherche $C^c = D_0 \cup D_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ où D_i est l'évènement avoir exactement i uns et E_i est l'évènement avoir exactement i uns sans uns consécutifs. (Dés qu'il y a cinq 1 il y en a forcément 2 consécutifs. Les 2 premiers cardinaux sont faciles : $Card(D_0) = 9^8$, $Card(D_1) = 8.9^7$ se calcule comme le produit des 8 positions des 1 par le nombre de choix des autres chiffres.
Pour trouver $Card(E_i)$ il faut placer les i uns, ce qui revient à séparer les autres chiffres en (i+1) groupes, le premier et le dernier seulement pouvant êtres vides. Le nombre de possibilité est le nombre de solution de l'équation $\sum_{j=0}^{i} x_i = 8 - i = p$ avec $x_0, x_i \geq s_0 = s_i = 0$, $x_j \geq s_j = 1$ sinon. D'après le cours, le nombre de solution est $C_{i+1-1+p-s}^{i+1-1}$ avec $s = \sum_{j=0}^{i} s_j = i - 1$. Il y a donc $C_{i+9-2i}^{i} = \frac{(9-i)!}{(9-2i)!i!}$. Par ailleurs, dans E_i une fois les 1 placés, il y a 9^{8-i} choix des autres caractères, soit
$$Card(E_i) = 9^{8-i} \frac{(9-i)!}{(9-2i)!i!}.$$
En bilan vu que la description de C^c est une union disjointe :
$$P(C) = 1 - \left((\frac{9}{10})^8 + \frac{8}{10}(\frac{9}{10})^7 + \frac{7!}{10^2.5!.2!}(\frac{9}{10})^6 + \frac{6!}{10^3.3!.4!}(\frac{9}{10})^5 + \frac{5!}{10^4.1!.4!}(\frac{9}{10})^4 \right) = 0,07201216.$$