**Correction du Contrôle continu 3**

**Question de Cours (5 minutes maxi, 5 points) :**

1. (1.5 points) formule de Poincaré cf cours.
2. (1.5 points) Décrire la loi de Poisson $P(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$. Sur $\mathbb{N}$, $p_n = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, n \in \mathbb{N}$
3. (1 point (dont 0.5 si seul le cas de 3 variables est fait et 1/1 point pour un nombre fini ou si le système est complet).) La formule des probabilités totales : pour $(B_n)_{n\geq 1}$ un système presque complet d'évènements avec $P(B_n) \neq 0$, et $A$ un évènement
$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n)P(B_n)$$
4. (1 point) $A$ et $B$ indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

**Exercice 1 (8 points)**

1. **0,5 points**Combien peut on construire de mots de passes en utilisant exactement 10 chiffres distincts (parmi les 10 chiffres) ? (Ex : 1458239760) Les mots de passes sont des suites ordonnés et si les chiffres sont distincts, ce sont des permutations de $n = 10$ éléments donc le cardinal est $n! = 10!$.
2. **1,5 points** Combien peut on construire de mots de passes en utilisant exactement 5 lettres majuscules DISTINCTES (parmi les 26 lettres) et 5 chiffres (parmi les 10 chiffres de bases, non nécessairement distincts) ? (Ex : AB11D64C8) Il y a $A_{26}^5 = 26.25.24.23.22$ choix de lettres (arrangements sans répétitions) et $10^5$ choix de chiffres( arrangements avec répétitions). Enfin il y a $C_{10}^5 = \frac{10!}{(5!)^2}$ choix des positions des chiffres. Réponse finale : :
$$10^5 A_{26}^5 . \frac{10!}{(5!)^2}$$
3. **1 point** Calculer le nombre de mots que l'on peut fabriquer avec les lettres du mot LOGICIEL (en utilisant toutes les lettres, exactement le même nombre de fois sans importance de l'existence du mot dans aucune langue).

   Il s'agit d'un arrangement avec répétition de 2I, 2L, 1 O, 1G, 1 C, 1E soit d'après le cours :
$$\frac{8!}{(2!)^2(1!)^4} = \frac{8!}{4}.$$
4. **2 points** Combien peut on construire de mots de passes en utilisant exactement 8 chiffres (pas forcément distincts parmi les 10 chiffres) dont au moins 2 six ? (Ex : 16582697 ou 16666697) SOit $A$ l'ensemble de ces mots, le complémentaires $A^c$ est l'ensemble des MdP contenant 0 ou 1 six. Il y a $9^8$ mots ne contenant aucun 6 et $8.9^7$ contenant exactement un six (8 positions du 6, et $9^7$ choix des autres soit :
$$Card(A) = 10^8 - 9^8 - 8.9^7$$

5. **1 points** Combien peut on construire de mots de passes en utilisant exactement 6 chiffres distincts en ordre croissant (parmi les 10 chiffres) ? (Ex : 124589)
   Cela revient à prendre une partie à 6 éléments parmi les 10 chiffres (ensuite on les range en ordre croissant et cela détermine le mot de passe) soit
   $$C_{10}^{6} = C_{10}^{4} = \frac{10.9.8.7}{4!} = \frac{10.9.8.7}{24} = 210$$

6. **2 points** Calculons la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k+1} C_n^k$ en l'exprimant comme une primitive
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k+1} C_n^k = \frac{1}{3} \int_0^3 dx \sum_{k=0}^{n} x^k C_n^k = \frac{1}{3} \int_0^3 dx(1+x)^n = \frac{4^{n+1}-1}{3(n+1)}$$
   L'avant dernière identité vient de la formule du binôme.

**Exercice 2 (7 points)** Une urne contient 10 boules rouges numérotées de 1 à 10 et 5 boules vertes numérotées de 1 à 5. On tire SIMULTANÉMENT 6 boules au hasard.

1. **0,5 points** L'espace des réalisations est $\Omega = \mathcal{P}_6(\{R1, ...R10, V1, ..., V5\}) \simeq \mathcal{P}_6([\![1, 15]\!])$ l'ensemble des parties à 6 éléments de l'ensemble des 10 boules rouges et 5 boules vertes (car le tirage est simultané donc non-ordonné).
2. **0,5 points**$Card(\Omega) = C_{15}^{6} = \frac{15!}{9!6!}$
3. **1,5 points (dont 0,5 pour la formule $\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ donné une fois dans tout l'exo)** L'ensemble $A$ des tirages avec exactement 3 boules rouges a cardinal $C_{10}^{3} C_5^3$. (tirage de 3 boules rouges parmi les 10 et 3 vertes parmi les 5) donc
   $$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{C_{10}^{3} C_5^3}{C_{15}^{6}}.$$
4. **1 point** Soit l'ensemble $B$ des tirages avec au moins 2 boules rouges. $B^c$ est l'ensemble des tirage avec exactement une boule rouge dont le nombre est $C_{10}^{1} C_5^5 = 10$ d'où
   $$P(B) = 1 - \frac{10}{C_{15}^{6}}.$$
5. **1 point** Soit l'ensemble $C$ des tirages avec 3 pairs de chiffres égaux. Cela revient à choisir 3 chiffres entre 1 et 5 (ensuite les pairs sont déterminés) donc $Card(C) = C_5^3$
   DOnc on obtient
   $$P(C) = \frac{C_5^3}{C_{15}^{6}}$$
6. **2,5 points** Quelle est la probabilité d'avoir des chiffres distincts (c'est-à-dire jamais à la fois un chiffre rouge et le même chiffre vert) ? SOit $D$ l'ensemble des tirages. SOit $D_i = D \cap \{on\ tire\ i\ boules\ vertes\}$. Alors $Card(D_i) = C_5^i C_{10-i}^{6-i}$ car on a $C_5^i$ choix de $i$ boules vertes parmi les 5 et une fois fixé celles-ci, il reste $10 - i$ boules rouges ayant d'autres numéros et on en tire $6 - i$ parmi elles. Comme $D = \cup_{i=0}^{5} D_i$ et que l'union est disjointe, on trouve :
   $$P(D) = \frac{\sum_{i=0}^{5} C_5^i C_{10-i}^{6-i}}{C_{15}^{6}} = \frac{C_{10}^{6} + 5C_9^5 + 10C_8^4 + 10C_7^3 + 5C_6^2 + C_5^1}{C_{15}^{6}}$$