Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 Analyse et Probabilités pour l'Informatique — 2013-2014

**Contrôle continu final**
**Lundi 13 décembre 2013**

**Durée : 1 heure.**

**Les documents et les calculatrices sont interdits.**
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

**Exercice 1 (3 points)**

1. Donner un équivalent de la suite $\ln(1+\frac{(-1)^n}{n}) - \frac{(-1)^n}{n}$.
2. Quelle est la nature de la série $\sum \ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$ ?

**Exercice 2 (4 points)** On lance un dé équilibré (à 6 faces), chaque tirage étant indépendant, jusqu'à ce que l'on obtienne un multiple de 3 (c'est à dire 3 ou 6) et on appelle X le nombre de lancés utilisés.

1. Calculer $P(X = k)$ pour $k \geq 1$.
2. Calculer $P(X \geq 5)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X ?

**Exercice 3 (4 points)** Soit (X ; Y ) un couple de v.a. discrètes à valeur $\{1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau ci-dessous, a et b étant des paramètres réels :

| X/Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | a | 1/6 | 1/12 |
| 2 | b | 1/3 | 1/6 |

1. Déterminer a et b pour que ce tableau soit celui d'une loi.
2. Pour quelles valeurs de a et b ces v.a. sont indépendantes ?
3. Donner la loi de X, la loi de Y et la covariance cov(X ; Y ).

**Exercice 4 (4 points)** Soit X une variable aléatoire absolument continue admettant pour densité : $g(x) = cx^4$ si $x \in [0; 1]$ , $g(x) = 0$ sinon.

1. Calculer $c$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ puis la variance $\mathbb{V}(X)$.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. On pose $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Y . En déduire la densité de la variable aléatoire Y .

**Exercice 5 (5 points + Bonus 2 points)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi$- périodique paire définie par $f(t) = 1$ si $t \in [0, \pi/2]$ et $f(t) = -1$ si $t \in ]\pi/2, \pi]$. Soit $c \in \mathbb{R}$ et soit $X$ une variable aléatoire à valeure dans $\mathbb{N}$ telle que

$$P(X = 2p + 1) = c\frac{1}{(2p + 1)^2}, P(X = 2p) = 0 p \in \mathbb{N},$$

1. Montrer que la série de Fourier de $f$ est :

$$S(f) : \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos((2k+1)x)}{2k+1},$$

et étudier ses propriétés de convergence.

2. En déduire que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Que vaut $c \in \mathbb{R}$ ?

3. $X$ est t elle une variable aléatoire d'ordre 1 ? si oui calculer $E(X)$.
4. Pour quels $t \in \mathbb{R}$ , $t^X$ est elle une variable d'ordre 1.
5. **Bonus :** Calculer la fonction caractéristique de $X$ (on pourra utiliser les séries de Fourier d'une primitive $F$ de $f$ et celle de $G(x) = F(x + \frac{\pi}{2})$)