Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 Analyse et Probabilités pour l'Informatique — 2014-2015

Contrôle continu final
Vendredi 9 janvier 2015

Durée : 2 heures.

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont INTERDITS.
On prendra soin de JUSTIFIER les réponses aux exercices.

Exercice 1 (3 points)

1. Donner un équivalent de la suite $\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
2. La série $\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$ est elle absolument convergente ? convergente ?

Exercice 2 (3 points) Un laboratoire a mis au point un test pour déceler des chiens malades. Des essais prouvent que :

- 95 fois sur 100, le test donne un résultat positif quand le chien est effectivement malade.
- 90 fois sur 100, le test donne un résultat négatif quand le chien n'est pas malade.

Dans une population de chiens comprenant 4 % de malades, on pratique le test sur un chien choisi au hasard.

1. Quelle est la probabilité que le test soit positif ?
2. Enoncer la Formule de Bayes.
3. Sachant qu'un chien donné a eu un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Exercice 3 (6 points)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On rappelle que $P(X = n) = c\frac{\lambda^n}{n!}$ pour une constante $c > 0$.

1. Rappeler la valeur de c.
2. Calculer $P(X \geq 2)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X ?
4. Quel est le rayon de convergence des séries entières (de variable z) :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} z^n, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^4+2}{6n+3} z^n.$$

5. Calculer en fonction de λ et $z \in \mathbb{C}$ la fonction génératrice $E[z^X]$.

Exercice 4 (3 points + Bonus 1 point) Soit X une variable aléatoire continue admettant pour densité : $g(x) = C\ x^3(1+x)$ si $x \in [0;1]$, $g(x) = 0$ sinon.

1. Calculer C et $P(X = \frac{1}{2})$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ puis la variance $\mathbb{V}(X)$.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. **(Bonus 1 point)** On pose $Y = X^3$. Déterminer la fonction de répartition de Y . En déduire la densité de la variable aléatoire Y .

Exercice 5 (4 points) Soit (X ; Y) un couple de variables aléatoires discrètes à valeur $\{1,2\} \times \{1,2,3\}$ dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau ci-dessous :

X/Y	1	2	3
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

1. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
2. Donner la loi de X, la loi de Y et la covariance $cov(X;Y)$.
3. Calculer $E(X^2Y)$.

Exercice 6 (1 point + Bonus 1 point) Soit (X ; Y) un couple de variables aléatoires continues à valeur $[0,1]^2$ dont la densité est $g(x,y) = Cx^3y^2$ si $x \in [0,1], y \in [0,1]$ et 0 sinon (C est un nombre positif).

1. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
2. **(Bonus 1 point)** Calculer C et $E(X^3Y^2)$.