Cours d'Analyse pour l'informatique

1er octobre 2015

Chapitre 1

Suites et séries numériques

1 Suites numériques

1.1 Définitions

Définition 1. Une suite numérique est une application $u : I \to \mathbb{K}$ où I est une partie de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour $i \in I$, le nombre $u(i)$ est plutôt noté u_i et s'appelle terme général de la suite. La suite u elle-même est le plus souvent notée $(u_i)_{i\in I}$. Quand il est nécessaire de préciser, on dit que $(u_i)_{i\in I}$ est une suite réelle ou une suite de réels lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on dit que $(u_i)_{i\in I}$ est une suite complexe ou une suite de complexes lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est une suite finie lorsque I est finie. Dans ce chapitre, on s'intéresse essentiellement à l'étude des suites où I est infinie. Par défaut, on prendra $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{N}^*$. On utilisera alors la notation $(u_n)_{n\geq 0}$ ou $(u_n)_{n\geq 1}$.

Définition 2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. On appelle *sous-suite de* u (ou *suite extraite de* u) toute suite $(v_n)_{n\geq 0}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Définition 3. Une suite numérique est dite constante si tous ses termes sont égaux et elle est dite stationnaire s'il existe un rang à partir duquel tous les termes sont égaux.

Définition 4. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est *bornée* s'il existe un nombre $M \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, $|u_n| \leq M$. Lorsque $(u_n)_{n\geq 0}$ est réelle, on dit qu'elle est majorée s'il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n ' 0, $u_n \leq M$ et on dit qu'elle est minorée s'il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \geq 0, u_n \geq m$.

Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est à la fois minorée et majorée.

Définition 5. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante (resp. décroissante) si pour tout $n \geq 0; k \geq 0$, $u_n \leq u_{n+k}$ (resp. $u_n \geq u_{n+k}$). Dans un cas comme dans l'autre, on dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.

1.2 Convergence

Définition 6. Une suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ est *convergente* s'il existe un nombre $l \in \mathbb{K}$, appelé limite de la suite et noté $l = \lim_{n\to\infty} u_n$ ou $u_n \to l$, vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N_\epsilon : \forall n \geq N |u_n - l| \leq \epsilon.$$

Cette limite est alors unique et on dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l. Si la limite n'existe pas, on dit que la suite est *divergente.*

Si la limite n'existe pas, on dit que la suite est divergente.

Proposition 1. *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l, toute sous-suite de $(u_n)_{n\geq 0}$ converge aussi vers l.*

On remarque que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l revient à dire que la suite $(u_n - l)_{n\geq 0}$ (ou la suite $(|u_n - l|)_{n\geq 0}$) converge vers 0.

Proposition 2. *Toute suite convergente est bornée et toute suite bornée admet une sous-suite convergente.*

Proposition 3. *Une suite constante ou stationnaire est convergente.*

Définition 7. Une suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ est *de Cauchy* si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N_\epsilon : \forall p, q \geq N |u_p - u_q| \leq \epsilon.$$

Proposition 4. *Toute suite convergente est de Cauchy*

Mais la propriété intéressante à noter est que

Proposition 5. *Toute suite de Cauchy est convergente.*

On peut ainsi établir la convergence d'une suite même si on ne connaît pas la valeur de la limite.

Définition 8. Une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si on a la propriété suivante :

$$\forall M > 0, \exists N = N_M : \forall n \geq N, u_n \geq M.$$

(resp.

$$\forall M > 0, \exists N = N_M : \forall n \geq N, u_n \leq -M.)$$

On écrit alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$)

Proposition 6. *Une suite complexe $(u_n = x_n + iy_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ des parties réelles et la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ des parties imaginaires convergent et alors $limu_n = limx_n + ilimy_n$.*

1.3 Convergence et relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

. Dans ce paragraphe, on considère uniquement des suites réelles.

Proposition 7. *Toute suite croissante et majorée est convergente. Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.*

Toute suite décroissante et minorée est convergente. Une suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Toute suite monotone et bornée est convergente.

Proposition 8. *Toute suite monotone admettant une sous-suite convergente est elle-même convergente.*

Proposition 9 (Théorème des gendarmes)**.** *3. Soient* $(u_n)_{n\geq 0}$*,* $(v_n)_{n\geq 0}$ *et* $(w_n)_{n\geq 0}$ *trois suites telles que, pour tout n,* $u_n \leq w_n \leq v_n$ *. Si les deux suites* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *vers la même limite l, il en est de même de la suite* $(w_n)_{n\geq 0}$*.*

.

Proposition 10. *Soient* $(u_n)_{n\geq 0}$*,* $(v_n)_{n\geq 0}$ *deux suites convergentes. Si, pour tout n,* $u_n \leq v_n$ *, alors* $\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$

Définition 9. 5. Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont dites *adjacentes* si elles vérifient les trois propriétés suivantes :

(i) $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante

(ii) $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante

(iii) $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$ (et donc avec (i) et (ii)$u_n \leq v_n$.)

Proposition 11. *Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite.*

1.4 Opérations sur les limites

Proposition 12. *Soient* $(u_n)_{n\geq 0}$*,* $(v_n)_{n\geq 0}$ *deux suites numériques convergentes. Alors les suites* $(u_n + v_n)_{n\geq 0}$*,* $(u_n v_n)_{n\geq 0}$ *sont convergentes. De plus, on a*

$$\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = (\lim_{n\to\infty} u_n) + (\lim_{n\to\infty} v_n)$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n v_n) = (\lim_{n\to\infty} u_n)(\lim_{n\to\infty} v_n).$$

Si $\lambda \in I\!K$ *est un scalaire, la suite* $(\lambda u_n)_{n\geq 0}$ *est convergente et* $\lim_{n\to\infty}(\lambda v_n) = \lambda(\lim_{n\to\infty} v_n)$*.*

Si de plus $(\lim_{n\to\infty} v_n) \neq 0$ *alors à partir d'un certain rang k* $(\frac{u_n}{v_n})_{n\geq k}$ *est bien définie, converge et :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{(\lim_{n\to\infty} u_n)}{(\lim_{n\to\infty} v_n)}.$$

Proposition 13 (Théorème de Césaro)**.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 1}$ *une suite numérique et* $(v_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par* $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$*. Si* $(u_n)_{n\geq 1}$ *converge vers l, il en est de même de la suite* $(v_n)_{n\geq 1}$*.*

1.5 Relations de comparaison

Définition 10. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites numériques.

1. Domination. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *dominée* par la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ et on note $u_n =_{n\to\infty} O(v_n)$ ou simplement $u_n = O(v_n)$ s'il existe un réel positif M tel que, au moins à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq M|v_n|$.
2. Négligeabilité. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *négligeable* devant la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ et on note $u_n =_{n\to\infty} o(v_n)$ ou simplement $u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ et que, au moins à partir d'un certain rang, $u_n = \epsilon_n v_n$.
3. Equivalence. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *équivalente* à la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ et on note $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$ simplement $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ et que, au moins à partir d'un certain rang, $u_n = (1 + \epsilon_n)v_n$.

Ces notions ont un intérêt lorsque, à partir d'un certain rang, les termes de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ sont non nuls.

Proposition 14. *$u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$.*

Proposition 15. *On suppose que $\exists N \forall n \geq N v_n \neq 0$.*

1. *$u_n = O(v_n) \iff u_n/v_n$ est bornée.*
2. *$u_n = o(v_n) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.*
3. *$u_n \sim v_n \iff \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.*

Exemple 1. $n^\alpha = o(n^\beta)$ si et seulement si $\alpha < \beta$.

En effet $n^\alpha/n^\beta = 1/n^{\beta-\alpha}$ et cela tend vers 0 si et seulement si $\beta - \alpha > 0$.

Les relations de bases suivantes doivent être comprises et utilisées librement.

Proposition 16. *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$,$(w_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$ des suites numériques.*

1. *$u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$.*
2. *$u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n) \Rightarrow u_n + v_n = O(w_n)$.*
3. *$u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(z_n) \Rightarrow u_n v_n = O(w_n z_n)$.*
4. *$u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n) \Rightarrow u_n + v_n = o(w_n)$.*
5. *$u_n = o(w_n)$ et $v_n = O(z_n) \Rightarrow u_n v_n = o(w_n z_n)$.*
6. *$u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n) \Rightarrow u_n = O(w_n)$.*
7. *$u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n) \Rightarrow u_n = o(w_n)$.*
8. *$u_n = O(v_n)$ et $v_n = o(w_n) \Rightarrow u_n = o(w_n)$.*

Démonstration. Avant de commencer la preuve, remarquons que $v_n = O(z_n)$ si et seulement si, à partir d'un certain rang, $v_n = M_n z_n$ avec M_n une suite bornée. En effet, si $z_n = 0$, $|v_n| \leq M|z_n|$ donc $v_n = 0$ et on peut poser $M_n = 0$, et si $z_n \neq 0$ on pose $M_n = v_n/z_n$, dans tous les cas $|M_n| \leq M$ à partir d'un certain rang donc elle est bornée. La réciproque est évidente.

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = \epsilon_n v_n$ et $\epsilon \to 0$, donc ϵ_n est bornée par M et $|u_n| = |\epsilon_n||v_n| \leq M|v_n|$ et $u_n = O(v_n)$.
2. Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, on a pour n grand $|u_n| \leq M|w_n|$ et $|v_n| \leq N|w_n|$ donc $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq (M+N)|w_n|$ donc $u_n + v_n = O(w_n)$.
3. Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(z_n)$, on a pour n grand $|u_n| \leq M|w_n|$ et $|v_n| \leq N|z_n|$ donc $|u_n v_n| \leq |u_n||v_n| \leq MN|w_n||z_n|$ donc $u_n v_n = O(w_n z_n)$.
4. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors pour n grand $u_n = \epsilon_n w_n$ et $u_n = \eta_n w_n$ avec $\lim \epsilon_n = \lim \eta_n = 0$ donc $u_n + v_n = (\epsilon_n + \eta_n) w_n$ et comme $\lim(\epsilon_n + \eta_n) = 0$, $u_n + v_n = o(w_n)$.
5. $u_n = o(w_n)$ et $v_n = O(z_n)$ On a $u_n = \epsilon_n w_n$ et (par la remarque du début de la preuve) $v_n = M_n z_n$ avec $\lim \epsilon_n = 0$ et $|M_n| \leq M$, donc $u_n v_n = \epsilon_n M_n w_n z_n$ et $|\epsilon_n M_n| \leq |\epsilon_n| M \to 0$ donc $u_n v_n = o(w_n z_n)$.
6. $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ on a pour n grand $|u_n| \leq M|v_n|$ et $|v_n| \leq N|w_n|$ donc $|u_n| \leq MN|w_n|$ et donc $u_n = O(w_n)$.
7. $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ On a $u_n = \epsilon_n v_n$ et (par la remarque du début de la preuve) $v_n = M_n w_n$ avec $\lim \epsilon_n = 0$ et $|M_n| \leq M$ $u_n = \epsilon_n M_n w_n$ et $|\epsilon_n M_n| \leq |\epsilon_n| M \to 0$ donc $u_n = o(w_n)$. Le dernier cas est similaire.

□

Le résultat suivant doit être connu :

Théorème 17 (Formule de Stirling)**.**

$$n! \sim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n}\ n^n\ e^{-n}$$

Nous rappelons ensuite les comparaisons de fonctions pour déduire des développements limités usuels (cf L1) les équivalents usuels et les appliquer aux suites.

Définition 11. Soit $D \subset \mathbb{R}$, avec soit $D =]a, b]$, soit $D = [b, a[$, soit $D = [A, +\infty[$ et alors $a = +\infty$, soit $D =]-\infty, A]$ et alors $a = -\infty$, $f, \varphi : D \to \mathbb{R}$, deux fonctions.

1. Domination. La fonction f est dite *dominée* par la fonction φ au voisinage de a et on note $f(x) =_{x\to a} O(\varphi)$ s'il existe une fonction $u : D \to \mathbb{R}$, bornée (au voisinage de a), telle que $f = \varphi u$.
2. Négligeabilité. La fonction f est dite *négligeable* devant la fonction φ au voisinage de a et on note $f(x) =_{x\to a} o(\varphi(x))$ s'il existe une fonction $u : D \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ et telle que $f = \varphi u$.
3. Equivalence. La fonction f est dite *équivalente* à la fonction φ au voisinage de a et on note $f(x) \sim_{x\to a} \varphi(x)$ s'il existe une fonction $u : D \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to a} u(x) = 1$ et telle que $f = \varphi u$. Ceci équivaut à $f(x) - \varphi(x) =_{x\to a} o(\varphi(x))$.

On a les mêmes propriétés que pour les relations de comparaisons des suites. On obtient des équivalents en utilisant les développements limités vus en L1.

Proposition 18 (Equivalents usuels en $x \to 0$)**.**

$$e^x - 1 \sim_{x\to 0} x, \qquad \ln(1+x) \sim_{x\to 0} x,$$

$$\sin(x) \sim_{x\to 0} x, \qquad \arcsin(x) \sim_{x\to 0} x,$$
$$\tan(x) \sim_{x\to 0} x, \qquad \arctan(x) \sim_{x\to 0} x,$$
$$sh(x) \sim_{x\to 0} x, \qquad th(x) \sim_{x\to 0} x,$$
$$\cos(x) - 1 \sim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2}, \qquad ch(x) - 1 \sim_{x\to 0} \frac{x^2}{2},$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \sim_{x\to 0} \alpha x, (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Proposition 19. *Si $u_n \in D$ et $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ et soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ alors*

1. *Si $f(x) =_{x\to a} O(g(x))$ alors $f(u_n) =_{n\to\infty} O(g(u_n))$.*
2. *Si $f(x) =_{x\to a} o(g(x))$ alors $f(u_n) =_{n\to\infty} o(g(u_n))$.*
3. *Si $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$ alors $f(u_n) \sim_{n\to\infty} g(u_n)$.*

Exemple 2.
1. Comme $1/n \to 0$ et $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$, on en déduit $\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$ donc $n\ln(1+1/n) \sim 1$ c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} n\ln(1+1/n) = 1$. Donc $(1+\frac{1}{n})^n = exp(n\ln(1+1/n)) \to exp(1)$.
2. Comme $1/n \to 0$ et $\cos(x) - 1 \sim_{x\to 0} -x^2/2$ on déduit $\cos(1/n) - 1 \sim -1/2n^2$ donc $\cos(1/n) - 1 \to 0$ et $\ln(\cos(1/n)) = \ln(1 + (\cos(1/n) - 1)) \sim (\cos(1/n) - 1) \sim -1/2n^2$.

1.6 Suite définie par récurrence

C'est une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par la donnée de $u_0 \in D$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ où D est une partie de $\mathbb{K}$ et $f : D \to D$ une application (récurrence d'ordre 1), ou par la donnée de $u_0 \in D$, $u_1 \in D$ et la relation $u_{n+2} = g(u_n, u_{n+1})$ où D une partie de $\mathbb{K}$ et $g : D \times D \to D$ une application (récurrence d'ordre 2). Lorsque la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente et que sa limite l appartient au domaine de continuité de f, on a nécessairement $f(l) = l$ (l est un point fixe de f).

2 Séries numériques

2.1 Définition

Définition 12. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique et pour tout n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. La série de terme général (u_n), notée $\sum u_n$ est définie par la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ appelée suite des sommes partielles.

Si, pour tout n, $u_n \in \mathbb{R}_+$, la série $\sum u_n$ est dite à termes positifs.

2.2 Convergence

Définition 13. La série $\sum u_n$ est dite *convergente* si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$ est convergente et elle est dite divergente dans le cas contraire. Dans le cas de convergence, la limite S des sommes partielles est appelée somme de la série et on note $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$

Définition 14. Soit $\sum u_n$ une série convergente et $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ sa somme. On peut définir la suite des restes $(R_n)_{n\geq 0}$ par $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

Il en résulte que la suite des restes $(R_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0. Par convergence de la série, les suites $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(S_{n-1})_{n\geq 1}$ convergent vers S et, comme $u_n = S_n - S_{n-1}$, on voit que

Proposition 20. *Pour une série convergente $\sum u_n$, la suite des termes généraux (u_n) converge vers 0.*

D'après ce qui précède, on déduit que si le terme général u_n ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ est nécessairement divergente.

Définition 15. Une série $\sum u_n$ telle que $u_n \not\to 0$ est dite *grossièrement divergente.* (critère de la divergence grossière)

Exemple 3 (Série géométrique). $\sum R^n$ avec $|R| \geq 1$ est grossièrement divergente car $R^n \not\to 0$. Si $|R| < 1$. $\sum_{k=0}^{n} R^k = \frac{1-R^{n+1}}{1-R} \to \frac{1}{1-R}$ La série géométrique $\sum R^n$ pour $|R| < 1$ est donc convergente de somme $S = \frac{1}{1-R}$.

Le critère de Cauchy de convergence des suites s'écrit de la façon suivante pour les séries :

Proposition 21. *La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy, c'est-à-dire :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \forall n \geq N, \forall p \geq 0, \quad |S_{n+p} - S_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| \leq \epsilon.$$

Définition 16. La série $\sum u_n$ est dite *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ de terme général $|u_n|$ est convergente. Une série convergente et non absolument convergente est dite semi- convergente.

Proposition 22 (critère de convergence absolue)**.** *Toute série $\sum u_n$ absolument convergente est convergente. De plus,*

$$|\sum_{k=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_n|.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, par le critère de Cauchy, soit N tel que pour $n \geq N, p \geq 0$ $\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_n| \leq \epsilon$. Par l'inégalité triangulaire

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_n| \leq \epsilon.$$

Donc par le critère de Cauchy, $\sum u_n$ est convergente. En passant à la limite dans l'inégalité, on obtient l'inégalité de l'énoncé. □

Exemple 4. On verra plus loin que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente (critère spécial des séries alternées) mais pas absolument convergente (règle de Riemann).

En général, pour une série qui n'est pas à terme positif, on commence par chercher si elle converge absolument, en utilisant les critères pour les séries à termes positifs.

Proposition 23. *Une série complexe $\sum u_n = \sum x_n + i \sum y_n$ converge (resp. converge absolument) si et seulement si la série $\sum x_n$ des parties réelles et la série $\sum y_n$ des parties imaginaires convergent (resp. convergent absolument) et alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_n + i \sum_{k=0}^{\infty} y_n$.*

2.3 Critères de convergence (à connaître parfaitement)

Séries à termes positifs (et critères d'absolue convergence)

Proposition 24 (critère des séries à termes positifs)**.** *Une série $\sum u_n$ à termes positifs ($u_n \geq 0$) est convergente (donc absolument convergente) si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles est majorée. Dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sup S_n$.*

Démonstration. $S_n \leq S_{n+1}$ car $u_n \geq 0$ donc S_n est croissante, elle converge donc si et seulement si elle est majorée (proposition 7). □

Proposition 25 (critère de domination)**.** *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques.*

Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ est ABSOLUMENT CONVERGENTE, alors u_n est absolument convergente.

Proposition 26 (règle des équivalents)**.** *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles à TERMES POSITIFS ($u_n \geq 0, v_n \geq 0$) telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries sont de même nature (toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).*

Remarque 1. Ce critère est faux si le terme général n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang. Par exemple, nous verrons que (par le critère des séries alternées) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente et que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ est divergente alors que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Proposition 27 (règle de Cauchy)**.** *Soit $\sum u_n$ une série numérique telle que $\mu = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ existe (ou bien $\mu = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$).*

1. Si $\mu < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente,

2. Si $\mu > 1$, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente

3. Si $\mu = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple 5. Soit $a \neq 0$ $u_n = (1 + \frac{a^2}{n^2})^{-n^3}$, $\sqrt[n]{u_n} = (1 + \frac{a^2}{n^2})^{-n^2} = exp(-n^2 \ln(1 + \frac{a^2}{n^2})) \sim e^{-a^2}$ donc $\sqrt[n]{u_n} \to e^{-a^2} < 1$ (vu $a \neq 0$), donc $\sum (1 + \frac{a^2}{n^2})^{-n^3}$ converge.

Proposition 28 (règle de d'Alembert)**.** *Soit $\sum u_n$ une série numérique dont le terme général est non nul à partir d'un certain rang et telle que $k = lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ existe dans R_+.*

1. Si $k < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente,

2. Si $k > 1$, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente

3. Si $k = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple 6. La règle de d'Alembert est utile quand u_n est un produit. Par exemple $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1!)^3(3n)!}{(3(n+1))!(n!)^3} = \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \to 1/27 < 1$. La série $\sum \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ est donc absolument convergente.

Remarque 2. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ existe alors $\lim \sqrt[n]{|u_n|}$ existe et a la même valeur. On utilise donc la règle de Cauchy quand la régle de d'Alembert ne s'applique pas que si la suite $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ ne converge pas. (Si elle converge vers 1 cela ne sert à rien).

Exemple 7. Soit $u_n = \frac{1}{2^n}$ si n pair et $u_n = \frac{1}{3^n}$ si n impair. $u_n \leq 1/2^n$ donc $\sum u_n$ converge. Mais la règle de d'Alembert (assez faible) ne s'applique pas $\frac{u_{2p}}{u_{2p-1}} = \frac{3^{2p-1}}{2^{2p}} = (3/2)^{2p}/3 \to \infty$ (donc $v_p = u_p/u_{p-1}$ ne converge pas $v_{2p} \to \infty, v_{2p+1} \to 0$).

La règle de d'Alembert est un cas particulier du critère de comparaison logarithmique :

Proposition 29 (Comparaison logarithmique)**.** *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs telles que pour $n \geq n_0$:*

$$u_n > 0,\ \ v_n > 0, et\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. Si $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ est convergente,

2. Si $\sum u_n$ diverge la série $\sum v_n$ est divergente.

Démonstration. On a pour $n \geq n_0$:$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$, donc u_n/v_n est décroissante, donc $u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n$ le résultat suit du critère de domination. □

Exemple 8. Soit $u_n = \frac{1.3.5...(2n+1)}{2.4.6...2n} \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+3}{2n+2}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

pour n assez grand, si $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (On remarquera que le critère de d'Alembert ne s'applique pas). Comme $\sum v_n$ diverge (critère de Riemann plus bas), $\sum u_n$ diverge par comparaison logarithmique.

Autres critères

Proposition 30 (critère de décomposition)**.** *Soient* $\sum u_n$, $\sum v_n$ *et* $\sum w_n$ *trois séries telles que, pour tout* n, $w_n = u_n + v_n$. *Si deux de ces séries convergent, la troisième converge aussi. Si l'une d'elles est divergente, il y en a au moins une autre qui diverge.*

Définition 17. Une série numérique $\sum u_n$ est dite *téléscopique* s'il existe une suite numérique $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que, pour tout $n \geq 0$, $u_n = a_{n+1} - a_n$.

Proposition 31 (critère des séries téléscopiques)**.** *La série téléscopique* $\sum u_n$ *est convergente si et seulement si la suite* $(a_n)_{n\geq 1}$ *est convergente. On a alors*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} a_n - a_0.$$

Exemple 9. Si $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln(n)$. on voit que cette série est télescopique et comme $\ln(n) \to \infty$, la série $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})$ est divergente. Par la régle des équivalents, comme $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, on en déduit que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Définition 18. Une série réelle $\sum u_n$ est dite *alternée* si on peut mettre le terme général u_n sous la forme $u_n = (-1)^n a_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$, où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite positive.

Proposition 32 (critère spécial des séries alternées)**.** *Soit* $\sum u_n$ *est dite* alternée, $u_n = \pm(-1)^n a_n$. *Si la suite* $(a_n)_{n\geq 0}$ *est décroissante de limite nulle, la série* $\sum u_n$ *converge, sa somme est du signe de* u_0 *et, pour tout* n, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

Exemple 10. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est alternée et $1/\sqrt{n}$ décroit vers 0, donc $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

2.4 Opérations sur les séries

Comme pour les suites, la convergence des séries se conserve par addition et multiplication par un scalaire avec un résultat analogue pour les sommes.

Pour assurer la convergence par produit, on fait appel au produit de Cauchy de deux séries défini comme suit :

Définition 19. Le *produit de Cauchy* des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ dont le terme général est défini par $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

On a alors le résultat suivant :

Proposition 33. *Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *est une série absolument convergente* $\sum w_n$ *et l'on a* $\sum_{k=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_n\right)$.

Démonstration. Montrons que $\sum_{k=0}^{n} |w_n|$ est majorée. En effet, on a

$$\sum_{k=0}^{n} |w_n| \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} |u_p||v_q| \leq \sum_{p=0}^{n} |u_p| \sum_{q=0}^{n} |v_q| \leq \sum_{p=0}^{\infty} |u_p| \sum_{q=0}^{\infty} |v_q| < \infty.$$

De plus on a

$$|\sum_{k=0}^{n} w_n - \sum_{p=0}^{n} u_p \sum_{q=0}^{n} v_q| = |\sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} u_p v_q - \sum_{p=0}^{n} u_p \sum_{q=0}^{n} v_q| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{p+q=k} |u_p||v_q| \to 0,$$

(la convergence vers 0 vient de la convergence absolue de la série de Cauchy pour $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ dont le reste tend vers 0) donc la somme de la série de Cauchy est le produit des sommes. $\square$

2.5 Séries remarquables (à connaître parfaitement)

Proposition 34 (Série de Riemann)**.** *La série* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *($\alpha \in \mathbb{R}$) converge si et seulement si $\alpha > 1$. Il en résulte que si $\sum u_n$ est une série numérique telle que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\geq 1}$ est bornée avec $\alpha > 1$ (En particulier si elle est convergente ou de limite nulle), alors cette série est absolument convergente. (Critère de Riemann).*

Démonstration. La cas $\alpha = 1$ a été vu à l'exemple 9. Si $\alpha \neq 1$, on a

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}\left((1-\frac{1}{n})^{\alpha-1} - 1\right) \sim \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}(1-\alpha)\frac{1}{n}.$$

donc $\sum(\alpha-1)/n^\alpha$ a la même convergence que la série télescopique $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}$ qui converge si et seulement si $\alpha > 1$. □

Exemple 11. $u_n = \arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$ comme $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ le critère de Riemann implique que $\sum u_n$ converge. En fait $u_n = \arctan(n+1) - \arctan(n)$ est télescopique et $\sum u_n$ converge avec pour somme $\pi/2$.

Proposition 35 (Série de Bertrand)**.** $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$*, $n \geq 2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1 et \beta > 1$).*

Proposition 36 (Série géométrique)**.** *. Soit $(a, z) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. La série géométrique de premier terme a et de raison z est définie par $\sum az^n$. Cette série converge si et seulement si $|z| < 1$. Elle est alors absolument convergente et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n = \frac{a}{1-z}.$$

Proposition 37 (Série exponentielle)**.** *. C'est la série numérique de la forme $\sum \frac{z^n}{n!}$ où $z \in \mathbb{C}$. Cette série est toujours absolument convergente et sa somme est la fonction exponentielle*

$$exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

2.6 Quelques exemples plus avancés

Exemple 12. Montrons que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge. Déjà $|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc la série n'est pas absolument convergente. De plus :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})^{-1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n})) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}}).$$

Le premier terme est celui d'une série convergente par le critère spécial des séries alternées (CSSA), le deuxième terme diverge par la règle de Riemann, et le troisième terme converge par comparaison et règle de Riemann. Par le critère de décomposition, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge.

C'est une méthode générale, pour une série non-absolument convergente où le CSSA ne s'applique pas directement, on cherche un développement limité pour s'y ramener.

Exemple 13. Soit $u_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}\frac{1}{\sqrt{n}}$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Montrons que $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$ (soit $v_n = \frac{1}{n}$) (On remarquera que le critère de d'Alembert ou la comparaison logarithmique directe ne s'appliquent pas). En effet

$$\frac{u_{n+1}v_n}{u_n v_{n+1}} = (1-\frac{1}{2(n+1)})\sqrt{1+\frac{1}{n}} = (1-\frac{1}{2(n+1)})(1+\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2}) = 1-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2}) = 1+O(\frac{1}{n^2})$$

d'où si $w_n = \ln(u_{n+1}v_n) - \ln(u_n v_{n+1}) = \ln(1+O(\frac{1}{n^2})) = o(\frac{1}{n^{3/2}})$, Donc $\sum w_n$ converge (critère de Riemann) et donc la série télescopique $\sum \ln(u_n/v_n) - \ln(u_{n+1}/v_{n+1})$ converge donc (critère des séries télescopiques) la suite (u_n/v_n) converge (vers λ) donc $u_n \sim \lambda v_n$ mais comme $\sum v_n$ diverge (exemple 9 ou critère de Riemann), $\sum u_n$ diverge par la règle des équivalents.

Chapitre 2

Exemples de séries de fonctions

1 Séries de fonctions : généralités

1.1 Définition

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de D (en général ,$D = \mathbb{R}$ ou $D = [a,b]$ ou $D = \mathbb{C}$, ou $D = \{z \in \mathbb{C} | z| \leq R\} =: D(0,R))$ dans $\mathbb{K}$. On peut pour chaque $x \in D$ considérer la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 0}$ et pour tout n, la somme partielle de la série numérique

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

La série de terme général f_n, notée $\sum f_n$ est définie par la suite des fonctions $(S_n)_{n\geq 0}$ appelée suite des sommes partielles.

1.2 Convergence

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de D dans $\mathbb{K}$, $A \subset D$ et $f : A \mapsto \mathbb{K}$ une fonction. Pour tout n, on pose $||f_n||_A = \sup_{x\in A} |f_n(x)|$.

Définition 20. On dit que la série $\sum f_n$ *converge simplement* vers f sur A si pour tout $x \in A$, la suite numérique $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente de limite $f(x)$, c'est-à-dire si la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente de somme $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$. La fonction f est appelée somme de la série $\sum f_n$ et elle est notée $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$. Elle peut être donnée à l'avance ou alors définie par la relation précédente. Quand elle existe, cette fonction somme est unique.

Soit $\sum f_n$ une série convergeant simplement sur A et $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ sa somme. On peut définir la suite des restes $(R_n)_{n\geq 0}$ par $R_n = f - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$ pour $n \geq 0$. Il en résulte que $(R_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$, convergente simplement vers 0 sur A. Par convergence de la série, les suites $(S_{n+1})_{n\geq 0}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ convergent vers f et, comme $f_n = S_n - S_{n-1}$, on voit que le terme général d'une série simplement convergente converge simplement vers 0

Définition 21. On dit que la série $\sum f_n$ *converge absolument* vers f sur A si pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente. 0n a alors

$$|\sum_{k=0}^{\infty} f_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|.$$

Remarque 3. On introduit en général d'autres notions de convergence uniforme et normale que l'on n'étudiera pas dans ce cours et qui sont à la base des résultats de régularité des exemples qui seront abordés.

Exemple 14. Soit $f_n(x) = xe^{-nx}$ sur $D = [0, \infty[$. Pour tout $x \in A$ $f_n(x) = o(\frac{1}{n^2})$ donc f_n converge simplement (même absolument) et sa limite est f définie par $f(0) = 0$ et si $x \neq 0$

$$f(x) = x \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (e^{-x})^k = x \lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{-x(n+1)}}{1 - e^{-x}} = \frac{x}{1 - e^{-x}}.$$

On remarque que $lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ donc la limite f peut ne pas être continue même si les f_n le sont.

Nous allons nous intéresser au cas où f_n sont des fonctions simples $f_n(z) = a_n z^n$ (sére entière généralisant les polynômes, $z \in \mathbb{C}$) ou $f_n(x) = a_n \cos(\omega nx) + b_n sin(\omega nx)$ (série trigonométrique $x \in \mathbb{R}$). Ce sont des exemples important dans les applications.

2 Séries entières

2.1 Définition

Une série entière est une série de fonctions $\sum f_n$ dont le terme général f_n est une fonction définie par $f_n(x) = a_n x^n$ où $a_n \in \mathbb{K}$ et x est une variable réelle ou complexe. Les termes de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ sont appelés *coefficients* de la série entière. Une telle série est habituellement notée $\sum a_n x^n$. On se propose d'étudier le domaine de convergence de la $\sum a_n x^n$ c'est-à-dire l'ensemble des $x \in \mathbb{K}$ pour lesquels cette série converge puis les propriétés de la somme f définie par $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$.

2.2 Rayon de convergence, disque de convergence, intervalle de convergence

.

Définition 22. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Le rayon de convergence de la série est l'élément $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ (R est donc un réel positif ou $+\infty$) défini par

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ : |a_n| r^n \text{ bornée}\}.$$

Proposition 38. *R est donc l'unique élément vérifiant la propriété suivante :* $\forall z, |z| < R, \sum a_n z^n$ *converge (absolument) et* $\forall z |z| > R, \sum a_n z^n$ *diverge (grossièrement).*

Si $R = 0$, la série $\sum a_n x^n$ ne converge que si $x = 0$. Si $R = +\infty$, la série $\sum a_n x^n$ converge pour tout x.

Proposition 39. *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de la variable réelle* x *de rayon de convergence* $R > 0$. *Pour tout* $x \in I =]-R, R[$, *la série* $\sum a_n x^n$ *est absolument convergente et sa somme* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *est bien définie. L'intervalle ouvert* I *s'appelle* intervalle de convergence *de la série entière sur lequel la somme est bien définie.*

Proposition 40. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de la variable complexe* z *de rayon de convergence* $R > 0$. *pour tout complexe* z *tel que* $|z| < R$, *la série* $\sum a_n z^n$ *est absolument convergente et sa somme* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *est bien définie. Le disque ouvert* $D(0, R) = \{z, |z| < R\}$ *de centre 0 et de rayon* R *s'appelle* disque de convergence *de la série entière sur lequel la somme est bien définie.*

Définition 23. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe z de rayon de convergence R. Le cercle $C = \{z \in C : |z| = R\}$ s'appelle *cercle de convergence.* Si $z \in C$, la série $\sum a_n z^n$ peut être convergente ou divergente.

2.3 Caractérisations du rayon de convergence

Proposition 41. *Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est donné par*

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ : \lim_{n\to+\infty} |a_n| r^n = 0\} = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ : \sum |a_n| r^n < \infty\}.$$

Proposition 42 (règle de d'Alembert)**.** *Si les coefficients sont tous non nuls et si $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ existe, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est*

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Exemple 15. $\sum n! x^n$ a rayon de convergence $R = 0$, $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$ a rayon de convergence $R = \infty$, $\sum \frac{x^n}{n^2}$ a rayon de convergence $R = 1$.$\sum \frac{(n!)^2}{(2n!)} x^n$ a rayon de convergence $R = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4$.

Proposition 43 (Formule d'Hadamard-règle de Cauchy)**.** *Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est*

$$R = (\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}.$$

Par exemple, si $L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ existe, alors $R = 1/L$.

Exemple 16. $\sum (2 + (-1)^n)^n x^n$ a rayon de convergence $R = (\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|(2 + (-1)^n)^n|})^{-1} = (\limsup_{n\to+\infty} (2 + (-1)^n))^{-1} = \frac{1}{3}$.

Proposition 44. *Si la série entière est de la forme $\sum a_n z^{\varphi(n)}$ où tous les coefficients a_n sont non nuls, on essaie de déterminer l'ensemble A des $r \geq 0$ tels que $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} r^{\varphi(n+1)-\varphi(n)} < 1$. Alors $R = \sup A$.*

2.4 Propriétés de la somme d'une série entière

Proposition 45. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable $x \in \mathbb{R}$, de rayon de convergence R > 0 et f sa somme définie dans l'intervalle de convergence I par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Alors f est de classe C^∞ sur I et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme de la série. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in D$,*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = k! a_k$. De plus $f^{(k)}$ est somme de la série entière $\sum \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$ de rayon de convergence R.

2.5 Séries entières usuelles, leur somme et leur rayon de convergence.

1. $$exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

   avec rayon de convergence $R = +\infty$. On en déduit les DSE des fonctions trigonométriques et hyperboliques :
   $$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!},$$
   $$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
   $$ch(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!},$$
   $$sh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2. $$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

   avec rayon de convergence R = 1.

3. $$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$$

   avec rayon de convergence R = 1.

4. .
   $$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \alpha > 0$$

   avec rayon de convergence R = 1. On remarquera que l'on sous-entend la somme finie si $\alpha \in \mathbb{N}$.

2.6 Application : méthode des séries génératrices.

Souvent en probabilité, on est ramené à calculer une suite b_n d'origine combinatoire satisfaisant une relation de récurrence.

Il s'agit de considérer la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ pour calculer b_n.

Si on peut calculer la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, b_n est obtenue par dérivation ou en utilisant les séries entières classiques.

Exemple 17. Soit C_n le nombre de parenthésages à n parenthèses ouvrantes.

On expliquera dans le cours de probabilité (exo) que :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}, C_0 = 1.$$

Si on pose $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ cette série a rayon de convergence au moins 1/4 car $C_n \leq 2^{2n}$ (le nombre de parenthésage bien ou mal formé de $2n$ est $C_{2n}^n \leq 2^{2n}$.)

De plus la relation devient

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} x^k x^{n-k} = 1 + x \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} C_k C_{m-k} x^k x^{m-k} = 1 + xT(x)^2$$

(en prenant $m = n - 1$ et en regardant le produit de Cauchy de T et lui même).

En résolvant l'équation du second degré, on obtient :

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \\ &= -\frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})...(\frac{-2n+3}{2})}{n!}(-4x)^n \\ &= \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1.3...(2n-3))}{n!}(2x)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^{n-1}. \end{aligned}$$

Donc $C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$.

3 Séries trigonométriques, séries de Fourier

3.1 Rappels

Définition 24. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction. Pour $k \in \mathbb{N}$ (resp. $k \in \mathbb{N}^*$), on dit que f est C^k (resp. D^k) par morceaux s'il existe une subdivision $(a_j)_{0 \leq j \leq n}$, $a = a_0 < a_1 < \ < a_n = b$ de $[a, b]$ telle que, pour tout entier $j \in [0, n-1]$, f coïncide sur l'intervalle ouvert $]a_j, a_{j+1}[$ avec une fonction h_j de classe C^k (i.e, k fois dérivable avec k-ième dérivée continue, resp. D^k i.e. k fois dérivable) sur le segment $[a_j, a_{j+1}]$. Une telle fonction n'est pas nécessairement continue sur $[a, b]$ et une fonction C^0 par morceaux est plutôt dite continue par morceaux.

Définition 25. Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est C^k *(resp.* D^k *) par morceaux* sur I si pour tout segment $[a, b] \subset I$, la restriction de f à $[a, b]$ est C^k (resp. D^k) par morceaux.

Remarque 4. Soit T > 0 et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction T - périodique et continue par morceaux. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{\alpha}^{\alpha+T} g(t)dt$ existe et sa valeur ne dépend pas de α On peut par exemple dire que la

valeur commune est $\int_0^T g(t)dt$.

Définition 26. Soit I un intervalle de R et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On appelle régularisée

de f la fonction $\tilde{f}$ définie sur I par

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} == \frac{(\lim_{t \to x, t > x} f(t) + \lim_{t \to x, t < x} f(t))}{2}.$$

3.2 Séries trigonométriques

Définition 27. On appelle série trigonométrique une série de fonctions de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)) \tag{2.1}$$

ou de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega n t} \tag{2.2}$$

où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 1}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des suites numériques appelées suites des coefficients de la série trigonométrique. La forme (2.1) est l'écriture de la série dans la base (trigonométrique) réelle et la forme (2.2) est son écriture dans la base (trigonométrique) complexe.

Le terme général de la série (2.1) est la fonction u_n définie par $u_n(t) = (a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t))$ si $n \geq 1$

et $u_0(t) = \frac{a_0}{2}$. La fonction u_0 est constante et, pour $n \geq 1$, la fonction u_n est trigonométrique T-périodique où $T = \frac{2\pi}{\omega}$ On constate qu'il est inutile de définir le coefficient b_0 qui serait celui de la fonction nulle, mais on peut poser $b_0 = 0$ si on considère que cette convention est commode.

La somme partielle d'ordre n de la série (2.1) est la fonction S_n définie par $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t)$. Comme l'indice dans la forme (2.2) parcourt $\mathbb{Z}$, on considère que le terme général de la série (2.2) est la fonction v_n définie, pour $n \geq 1$, par $v_n(t) = c_n e^{i\omega n t} + c_{-n} e^{-i\omega n t}$ et $v_0(t) = c_0$. La fonction v_0 est constante et pour $n \geq 1$, la fonction v_n est trigonométrique T - périodique (même T/n- périodique) où $T = 2\pi/\omega$.

La somme partielle d'ordre n de la série (2.2) est donc la fonction P_n définie par $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} v_k(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\omega k t}$.

Dans les deux écritures, les sommes partielles sont des polynômes trigonométriques.

Remarque 5. Pour que les deux formes (2.1) et (2.2) désignent la même série trigonométrique, il faut et il suffit que le

terme général soit le même dans les deux cas. On a donc $c_0 = a_0/2$ et, pour $n \geq 1$,

$$c_n e^{i\omega n t} + c_{-n} e^{-i\omega n t} = (a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)) = \frac{(a_n - i b_n)}{2} e^{i\omega n t} + \frac{(a_n + i b_n)}{2} e^{-i\omega n t}$$

d'où

$$c_n = \frac{(a_n - i b_n)}{2}, c_{-n} = \frac{(a_n + i b_n)}{2}$$

Ainsi, les deux formes (2.1) et (2.2) désignent la même série trigonométrique si et seulement si on a les relations suivantes entre les coefficients :

$$\forall n \geq 0, c_n = \frac{(a_n - i b_n)}{2}, \forall n \geq 1, c_{-n} = \frac{(a_n + i b_n)}{2}$$

On peut en déduire a_n et b_n en fonction des coefficients c_n $a_0 = 2c_0$ et, pour $n \geq 1$, $a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$.

Convergence

Le terme général d'une série trigonométrique est T - périodique. Il en résulte que les propriétés de convergence sur $\mathbb{R}$ découlent des propriétés de convergence sur un intervalle d'amplitude T, par exemple $[0, T]$.

Proposition 46. *Si les séries des coefficients d'une série trigonométrique sont absolument convergentes, la somme $S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\omega nt) + b_n \sin(\omega nt)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega nt}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ c'est une fonction T- périodique et continue . De plus,*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\int_0^x S(t)dt = \frac{a_0}{2}x + \frac{1}{\omega}[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n \sin(\omega nx) - b_n \cos(\omega nx))}{n}]$$

2. $$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} S(t)\cos(\omega nt)dt,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} S(t)\sin(\omega nt)dt,$$

et

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} S(t)e^{-in\omega t}dt.$$

3.3 Séries de Fourier

Définition 28. Soit $T > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction T - périodique continue par morceaux et $\omega = \frac{2\pi}{T}$. La série de Fourier de f est la série trigonométrique S(f) :$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos(\omega nt) + b_n(f)\sin(\omega nt)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{i\omega nt}$ dont les coefficients sont définis par les relations

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(\omega nt)dt,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(\omega nt)dt,$$

et

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)e^{-in\omega t}dt.$$

Les sommes partielles de la série de Fourier de f sont donc définies par

$$S_k(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n(f)\cos(\omega nt) + b_n(f)\sin(\omega nt)) = \sum_{n=-k}^{+k} c_n(f)e^{i\omega nt}$$

Quand il n' y a pas de confusion, les quantités précédentes sont notées simplement a_n , b_n , c_n et $S_n(x)$.

Propriétés des coefficients de la série de Fourier.

Nous gardons les notations du paragraphe précédent.

Proposition 47. *(Lemme de Riemann-Lebesgue) On a* $\lim a_n(f) = \lim b_n(f) = \lim c_n(f) = 0$.

Proposition 48. *Si f est paire (resp. impaire), alors, pour tout n, $b_n(f) = 0$ (resp. $a_n(f) = 0$) , $a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(\omega nt)dt$ (resp. $b_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(\omega nt)dt$)*

Théorème 49. *(Egalité de Parseval)*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

Le résultat précédent précise le lemme de Riemann Lebesgue et implique le résultat suivant.

Corollaire 50. *Une fonction T - périodique et continue est nulle si et seulement si tous les coefficients de sa série de Fourier sont nuls.*

Convergence de la série de Fourier

Théorème 51 (Dirichlet). *Soit $f : I\!R \to I\!K$ une fonction T- périodique dérivable par morceaux. Alors, sa série de Fourier converge simplement sur $I\!R$ vers sa régularisée $\tilde{f}(x)$. Ainsi, pour tout $x \in I\!R$,*

$$S(f,t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos(\omega nt) + b_n(f)\sin(\omega nt)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{i\omega nt}\tilde{f}(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

Séries de Fourier classiques

Exemple 18 (Signal créneau). Soit f la fonction 2π-périodique impaire telle que $f(x) = 1$ si $x \in [0, \pi[$. Les $a_n(f) = 0$ et

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(\omega nt)dt = \frac{2}{\pi}[\frac{-\cos(nt)}{n}]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}$$

Comme f est C^1 par morceau, sa série de Fourier

$$S(f) : \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1},$$

converge simplement vers la régularisée $\tilde{f}$ de f donc en $x \in]0, \pi[$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} = 1 = S(\pi/2) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Par Parseval on obtient :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)^2 dt = 2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Exemple 19 (Signal en dent de scie). Soit f la fonction 2π-périodique impaire tel que $f(x) = x$ si $x \in [-\pi, \pi[$. Les $a_n(f) = 0$ et

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}[\frac{-t\cos(nt)}{n}]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Comme f est C^1 par morceaux, sa série de Fourier

$$S(f) : 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(nx)}{n},$$

converge simplement vers la régularisée $\tilde{f}$ de f c'est à dire $f(x)$ pour $x \in]-\pi, \pi[$ et 0 en π. Par Parseval on obtient :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{2\pi^2}{3} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}.$$