Probabilités pour l'informatique **Feuille d'exercices N°1**
2015-2016

Exercice 1. Soit $\Omega = \{a, b, c\}$. Donner :

1. L'ensemble $P(\Omega)$ des parties de Ω.
2. L'ensemble des permutations de Ω.
3. L'ensemble des arrangements de Ω.
4. L'ensemble des combinaisons de Ω.
5. L'ensemble des arrangements avec répétition d'ordre (3,2,1) de Ω.
6. L'ensemble des combinaisons avec répétition de 5 éléments de Ω.

Exercice 2. Calculer en fonction de n les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k,$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k$$

et

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}.$$

Exercice 3.

1. Soient a, b et n trois entiers. Montrer que $C_{a+b}^n = \sum_{k=0}^{a} C_a^k C_b^{n-k}$.
2. Soient n et N deux entiers tels que $1 \leq n \leq N$. En groupant les parties à n + 1 éléments de $[\![1, N+1]\!]$ selon leur plus grand élément, montrer que $\sum_{k=n}^{N} C_k^n = C_{N+1}^{n+1}$.

Exercice 4. Soit E un ensemble à n éléments. Calculer le nombre u_n des couples (X, Y) de parties de E tels que $X \subset Y$.

Exercice 5. Un matricule de plaque minéralogique est formé de 7 caractères. Calculer le nombre de plaques que l'on peut former dans chacun des cas suivants :

1. Les 4 premiers caractères sont des lettres et les 3 derniers sont des chiffres.
2. Les 4 premiers caractères sont des lettres distinctes et les 3 derniers sont des chiffres distincts.
3. Chaque matricule est formé de 3 chiffres et de 4 lettres.
4. Chaque matricule est formé de 2 lettres suivies de 3 chiffres puis de 2 lettres.

Exercice 6. Calculer le nombre de mots que l'on peut fabriquer avec les lettres de ETRENNE. Même question avec les lettres de ENTENTE.

Exercice 7. Calculer le nombre de suites de longueur $m+n$ formées avec m 0 et n 1 de manière à ce que deux 0 ne soient jamais voisins.

Exercice 8.

1. Calculer le nombre de listes classées par ordre alphabétique de 4 noms parmi 11.
2. Calculer le nombre de classements à l'issue d'une compétition é à laquelle participent 3 français, 4 anglais et 2 allemands.

3. Calculer le nombre de codes à 4 chiffres distincts selon que 0 est accepté ou non à la première place.

Exercice 9.

1. Soit c_n le nombre de parties de $[\![0, n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0, c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$. Déduire c_n.
2. Soit I_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

Exercice 10. Un ensemble de 10 pages comprend 2 pages coloriès en rouge, 3 pages coloriées en vert et 5 pages blanches. En considèrant d'abord que les pages sont toutes discernables puis que seules les pages de couleurs différentes le sont, calculer :

1. Le nombre de dispositions de ces 10 pages alternant une page coloriée et une page blanche.
2. Le nombre de fa ?ons de colorier les pages blanches avec 3 couleurs

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, $D_n = \{\sigma \in S_n : \forall k \in [\![1, n]\!], \sigma(k) \neq k\}$l'ensemble des dèrangements de $[\![1, n]\!]$ et d_n leur cardinal.

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $A_i = \{\sigma \in S_n : \sigma(i) = i\}$ et on pose $A = \cup_{i=1}^{n} A_i =$ Montrer que $D_n = A^c$ et en déduire que
$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
2. On note F_n^k le cardinal des permutations de S_n ayant exactement k points fixes. Montrer que $F_n^0 = d_n$ et que $F_n^k = C_n^k F_{n-k}^0$.

Exercice 12.

On note S_k^n le cardinal de l'ensemble $\mathscr{S}(E, F)$ des applications surjectives d'un ensemble E à n éléments sur un ensemble F à k éléments. Pour tout $b \in F$, on pose $A_b = \{f : E \to F : b \in f(E)\}$ et on pose $A = \sup_{b \in F} A_b$. Montrer que $\mathscr{S}(E, F) = A^c$ et en d éduire que

$$S_k^n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i (k-i)^n.$$

Exercice 13. Une urne contient 6 boules rouges numérotées de 1 à 6 et 5 boules vertes numérotées de 1 à 5.

1. On tire simultanément 4 boules. Déterminer le nombre de tirages qui fournissent :
   (a) exactement 3 boules rouges. (b) deux couples de numéros égaux.
2. Mêmes questions lorsque les boules sont tirés successivement avec remise. (pour (b), on entendra un couple comme deux fois le même numéro l'un vert l'autre rouge quelque soit l'ordre d'apparition du vert et du rouge, et deux couples comme des couples de numéros distincts).

Exercice 14. On répartit p serviettes dans n tiroirs numérotés de 1 à n.

1. Calculer le nombre de ces répartitions selon que l'on considère que les serviettes sont toutes discernables ou toutes identiques
2. Parmi ces répartitions, quel est le nombre de celles pour lesquelles aucun tiroir n'est vide.