Probabilités pour l'informatique **Feuille d'exercices N°3**
2015-2016

Exercice 1. On lance un dé équilibré jusqu'à ce que l'on obtienne 6 et on appelle X le nombre de lancés utilisés.
1. Calculer $P(X = k)$ pour $k \geq 1$.
2. Calculer $P(X \geq l)$.

Exercice 2. (Loi géométrique). On lance une pièce jusqu'à ce qu'on obtienne pile (la probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est p), et on note X le nombre de lancers nécessaires.
1. Donner la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X-1))$ et $\mathbb{E}(X^2)$.
3. Quelle est la loi de $Y = X - 1$? l'espérance et la variance de Y ?

Exercice 3. On lance un dé à six faces et la variable aléatoire X représente le chiffre obtenu. Si celui-ci est pair, la v.a. Y prend la valeur 1 et 0 sinon.
1) Déterminer $P(X = i \text{ et } Y = j)$.
2) Déterminer la loi de X et la loi de Y .
2) Indiquer si ces v.a. sont indépendantes.
3) Calculer $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(X+Y)$.

Exercice 4. (Loi de Poisson). Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire : $P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$.
1. Vérifier que $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) = 1$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X-1))$ et la variance de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(\frac{1}{1+X})$.

Exercice 5. Soit X une v. a. réelle de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit une v. a. réelle Y de la manière suivante :
- si X prend une valeur nulle ou impaire alors Y prend la valeur 0,
- si X prend une valeur paire alors Y prend la valeur $\frac{X}{2}$.
Trouver la loi de Y , son espérance et sa variance.

Exercice 6. On admet que le nombre X de véhicules franchissant le péage d'une autoroute pendant une certaine période est une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. A chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, il peut être contrôlé par la gendarmerie avec une probabilité $p \in]0; 1[$. On note Y le nombre de véhicules contrôlés.
1. Calculer $P(Y = j|X = k)$ en distinguant les cas $j \leq k$ et $j > k$.
2. En déduire $P(X = k \text{ et } Y = j)$.
3. Déterminer la loi de Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Les variables Y et X - Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. La fonction de répartition d'une v.a. est donnée par $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1/2 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 11/12 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$

Calculer $P(X = i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et $P(1/2 < X < 3/2)$.

Exercice 8. Soit X le nombre de rames de métro qui passent entre 16H et 17H en une station donnée. On a observé que le nombre moyen de rames est E(X) = 55 et que la variance est V (X) = 20.
Déterminer, en utilisant l'inégalité de Tchébychev, un minorant de la probabilité que le nombre de rames soit compris entre 50 et 60.

Exercice 9. Soit f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ x+1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq -1 \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Calculer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant une loi de densité f.
3. Calculer $P(|X| \geq 0,5)$.

Exercice 10. (Loi Exponentielle de paramètre α). Soit $\alpha > 0$. Soit X v.a. réelle ayant pour densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ pour $x \geq 0$, $f(x) = 0$ pour $x < 0$.
1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X et sa fonction caractéristique.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
4. Déterminer la fonction de répartition et la densité de X^2.

Exercice 11. Soit X une v.a.r. suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
1. Pour $s, t > 0$, calculer $P(X > s)$ puis $P(X > s + t | X > t)$.
2. Si X représente la durée de vie d'un composant électronique, comment peut-on interpréter cette propriété ?
3. Application : On suppose que la durée de vie, en jours, d'une ampoule, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 0.01. Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure encore au moins 10 jours, sachant qu'à son n-ème jour, elle marche encore ?

Exercice 12. On considère un système formé de deux composants A et B indépendants. Les composants sont au départ en fonctionnement. Le composant A (respectivement B) a une durée de fonctionnement qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (respectivement μ).
1. Quelle est la probabilité que A tombe en panne avant B ?
2. On suppose que les composants sont en série, c'est-à-dire que le système fonctionne si et seulement si les deux composants fonctionnent. Déterminer la loi de la durée de fonctionnement du système et sa durée moyenne de fonctionnement.
3. On suppose maintenant que les composants sont en parallèle, c'est-à-dire que le système fonctionne si et seulement si au moins l'un des deux fonctionne. Déterminer la durée moyenne de fonctionnement du système.

Exercice 13. (Loi Normale). On considère la fonction f définie par $f(x) = ke^{-x^2/2}, x \in \mathbb{R}$.
1. Déterminer la constante k telle que f puisse être considérée comme la densité de probabilité d'une v.a. U. Calculer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$?
2. Soit X la v.a. définie par $X = m + \sigma U$ où m et σ sont des réels non nuls. Que valent $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$? Déterminer la loi de X.

Exercice 14. (Loi de Cauchy) On considére la fonction f définie par $f(x) = \frac{k}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la constante k telle que f puisse être considérée comme la densité de probabilité d'une v.a. X. Calculer $P(X \in [2, 10])$.

Exercice 15. Soit X une variable aléatoire absolument continue admettant pour densité : $f(x) = 2x$ si $x \in [0; 1]$, $f(x) = 0$ sinon.
1. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ puis $\mathbb{V}(X)$. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. On pose $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Y . En déduire la densité de la variable aléatoire Y .

Exercice 16. Un constructeur pose des rails bout à bout. Chacun de ces rails mesure théoriquement 1 mètre. En réalité leurs longueurs sont distribuées uniformément entre 0,99 et 1,01 mètres et sont indépendantes.
1. On pose 100 rails. Donner une borne supérieur sur la probabilité pour que la longueur effective de la voie dépasse 100, 16 mètres ?
2. On pose n rails et on note L_n la longueur de la voie. Pour quelle valeur de n peut on affirmer avec une probabilité de 0, 9 que l'écart relatif $|L_n - n|/n$ n'excède pas 0,01 ?