Université Claude Bernard
L2 MASS 31

Mathématiques
2012-2013

Contrôle continu
Lundi 15 octobre 2012

Durée : 1 heure.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin à justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours (5 minutes maxi, 3 points) :

1. Donner la définition d'un homéomorphisme.
2. Donner la définition d'un compact, la caractérisation des compacts de $\mathbb{R}^n$ et une propriété des fonctions continues définies sur un compact.

Exercice 1 (4 points + Bonus 1 point) Soit $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$N(u) = |x+z| + |y-2z| + |y+3x| \text{ si } u = (x,y,z).$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $F = \{(x,y,z) \ : \ |x| + |y| \leq 1 - |y+3x|, z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. F est-il fermé ? F est il convexe ? (Justifier rapidement)
3. Les normes N et $||.||_1$ sont elles équivalentes ? Si oui déterminer $D > 0$ tels que

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \ N(u) \leq D||u||_1.$$

Bonus (1 point) Déterminer $C > 0$:

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \ C||u||_1 \leq N(u).$$

Exercice 2 (5 points) On considère le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $||.||_\infty$.

1. Soit

$$A = \{(x,y) \ : \ yx \leq 1, y \geq 0\},$$

Montrer que A est fermé.

2. Soit

$$D = \{(x,y) \ : \ y < 0\} \cup \{(x,y) \ : \ x > y\} \cup B((-3,4),2).$$

Montrer que D est ouvert.

3. Calculer l'adhérence $\overline{D}$.

Exercice 3 (4 points) Soit $G = \{\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ et $H = G^c \subset \mathbb{R}$.
Déterminer (en justifiant) $Int(G), \overline{G}, Int(H)$ et $\overline{H}$.

Exercice 4 (4 points) Soit $f, g : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^4 + y^4 - x^2y^2}, \qquad g(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^6 + y^6}.$$

1. Déterminer si f et g admettent des limites en $(0,0)$ et les calculer.
2. f et g sont elles continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$?