Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 MASS 31 — 2012-2013

Contrôle continu
Lundi 15 octobre 2012

Correction

Exercice 1 Soit $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$N(u) = |x+z| + |y-2z| + |y+3x| \text{ si } u = (x,y,z).$$

1. - Comme une somme de termes positifs est positif, on a $N(u) \geq 0$.
   -Si $N((x,y,z)) = 0$ alors (comme une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul) $x+z=0$, $y-2z=0$ $y+3x=0$ ce qui se résout (par équivalence) en $x=-z, y=2z, 2z+3(-z)=0$ soit $x=y=z=0$ d'où $(x,y,z)=0$
   - $N(\lambda(x,y,z)) = |\lambda x+\lambda z| + |\lambda y - 2\lambda z| + |\lambda y + 3\lambda x| = |\lambda||x+z| + |\lambda||y-2z| + |\lambda||y+3x| = |\lambda| N((x,y,z))$ (vu $|.|$ est une norme sur $\mathbb{R}$)
   - $N((x,y,z)+(x',y',z')) = |x+x'+z+z'| + |y+y'-2(z+z')| + |y+y'+3(x+x')|$.
   Or par l'inégalité triangulaire pour $|.|$: $|x+x'+z+z'| \leq |x+z| + |x'+z'|$ donc de même : $N((x,y,z)+(x',y',z')) \leq |x+z| + |y-2z| + |y+3x| + |x'+z'| + |y'-2z'| + |y'+3x'| = N((x,y,z)) + N((x',y',z'))$, d'où l'inégalité triangulaire pour N.
2. $F = \{(x,y) \ : \ N(x,y,0) \leq 1\} = B_F^N(0,1) \cap \{z=0\}$ est l'intersection de 2 fermés : la boule fermé pour N et le noyau de la forme linéaire continue $p_z : (x,y,z) \mapsto z$. F est donc fermé comme intersection de fermés et convexe comme intersection de convexes (on a vu en cours que la boule fermé est convexe et un sous-espace vectoriel est clairement convexe)
3. N et $||.||_1$ sont équivalentes car nous sommes en dimension finie. En appliquant l'inégalité triangulaire à chacun des termes on a $N(u) \leq |x|+|z|+|y|+2|z|+|y|+3|x| = 4|x|+3|z|+2|y| \leq 4||u||_1$, donc $D=4$ convient. On résout (par substitution) le système

$$\begin{aligned} x+z=x', y-2z=y', y+3x=z' &\iff x=x'-z, y=y'+2z, 3(x'-z)+(y'+2z)=z' \\ &\iff z=3x'+y'-z', x=z'-y'-2x', y=6x'+3y'-2z'. \end{aligned}$$

   On va baser le calcul de C sur le fait que $N((x,y,z)) = ||(x',y',z')||_1$ et borner comme précédemment. Donc pour $u=(x,y,z)$

$$\begin{aligned} ||u||_1 &= |z'-y'-2x'| + |6x'+3y'-2z'| + |3x'+y'-z'| \\ &\leq (2+6+3)|x'| + (1+3+1)|y'| + (1+2+1)|z'| \leq ||(x',y',z')||_1 = 11N(u). \end{aligned}$$

   Donc $C = \frac{1}{11}$ convient.

Exercice 2

1. $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = y$ sont polynomiales donc continues

$$A = \{(x,y) \ : \ yx \leq 1, y \geq 0\} = f^{-1}(]-\infty,1]) \cap g^{-1}([0,\infty[)$$

   est fermé comme intersection de deux fermés (chacun étant fermé comme image inverse d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue).

2. Soit $h(x,y)=x-y$ continue car polynomiale. $D=\{(x,y)\ :\ y<0\}\cup\{(x,y)\ :\ x>y\}\cup B((-3,4),2)$ est ouvert comme union de trois ouverts, la boule ouverte $B((-3,4),2)$, $\{(x,y)\ :\ x>y\}=h^{-1}(]0,\infty[)$, $\{(x,y)\ :\ y<0\}=g^{-1}((]-\infty,0[)$ (ouverts comme image réciproque d'ouverts par une application continue)
3. Montrons que $\overline{D}=E:=\{(x,y)\ :\ y\leq 0\}\cup\{(x,y)\ :\ x\geq y\}\cup B_F((-3,4),2)$, En effet, E ci dessus est bien fermé comme union finie des fermés $h^{-1}([0,\infty[), g^{-1}(]-\infty,0])$ et de la boule fermée $B_F((-3,4),2)$. Donc $\overline{D}\subset E$ car E est un fermé contenant D. De plus montrons $E\subset\overline{D}$. Or $E-D\subset\{(x,y)\ :\ y=0\}\cup\{(x,y)\ :\ x=y\}\cup S((-3,4),2)$. On a vu en TD $\overline{B((-3,4),2)}=B_F((-3,4),2)$ d'où $S((-3,4),2)\subset\overline{D}$. $D\ni(x,-1/n)\to(x,0)$ d'où $\{(x,y)\ :\ y=0\}\subset\overline{D}$ et $D\ni(x,x-1/n)\to(x,x)$ d'où $\{(x,y)\ :\ y=x\}\subset\overline{D}$.

Exercice 3 Soit $G=\{\frac{1}{n^2},n\in\mathbb{N}^*\}\subset\mathbb{R}$ et $H=G^c\subset\mathbb{R}$.

On montre (les équivalences sont des conséquences immédiates du cours) $Int(G)=\emptyset(\Longleftrightarrow\overline{H}=\mathbb{R})$ et $\overline{G}=G\cup\{0\}(\Longleftrightarrow Int(H)=G^c-\{0\})$.

Soit $x=1/n^2\in G$ $x_p=x+\sqrt{2}/p\in\mathbb{Q}^c\subset G^c$ et $x_p\to_{p\to\infty}x$ donc $x\in\overline{H}$ donc $\mathbb{R}=H\cup G\subset\overline{H}$.

Vu $1/n^2\to 0$, on a $0\in\overline{G}$ il reste à voir $G\cup\{0\}$ est un fermé contenant G, c'est à dire $G^c-\{0\}$ est ouvert, cela vient du fait que c'est l'union d'ouverts :

$$G^c-\{0\}=]-\infty,0[\cup]1,\infty[\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{1}{(n+1)^2},\frac{1}{n^2}[.$$

Exercice 4 Soit $f,g:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x,y)=\frac{x^2y^3}{x^4+y^4-x^2y^2},\qquad g(x,y)=\frac{x^2y^3}{x^6+y^6}.$$

1. On a $x^4+y^4-x^2y^2=(x^4+y^4+(x^2+y^2)^2)/2\geq y^4/2+x^4/2\geq x^2y^2$ (on utilise l'inégalité arithmetico-géométrique $|ab|\leq(a^2+b^2)/2$ venant de $(|a|-|b|)^2\geq 0$)d'où $|f(x,y)|\leq|y|\to_{(x,y)\to(0,0)}0$.
   On prend $g(1/n,1/n)=n/2\to\infty$ pour voir que g n'a pas de limite en 0 (on a aussi $g(0,1/n)=0\to 0$, $g(1/n\sqrt{n},1/n)=\frac{1}{n^6(\frac{1}{n^9}+\frac{1}{n^6})}\to 1$, $g(1/n\sqrt{n},-1/n)\to -1$.)
2. f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ comme quotients (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions polynômiales donc continues.