Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 MASS 31 — 2012-2013

Contrôle continu
Lundi 15 octobre 2013

Durée : 55 minutes.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin à justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours (5 minutes maxi, 4 points) :

1. Donner la définition d'une fonction Lipschitzienne et un exemple.
2. Enoncer le théorème de Heine en définissant les notions utilisées.

Exercice 1 (4 points) Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$N(u) = \max\left(|x|, |y|, \frac{2(|x|+|y|)}{3}\right) \text{ si } u = (x, y).$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Tracer l'ensemble $A = \{u \in \mathbb{R}^2, N(u) = 1\}$.
   Est-il ouvert ? fermé ? Son intérieur $Int(A)$ est il convexe ? (justifier)
3. Les normes N et $||.||_\infty$ sont elles équivalentes ? Déterminer $C > 0$ tels que

$$\forall u \in \mathbb{R}^2,\ C||u||_\infty \leq N(u).$$

Exercice 2 (9 points) On considère le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $||.||_\infty$.

1. Soit
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y^2 - x^2 \geq 1, y > 0\} \cup ([0, 1] \times \{0\}),$$
   Montrer que B est fermé.
2. Calculer Int(B).
3. Soit
$$D = (\mathbb{Q} \cap [0, 1[) \times]0, 1[.$$
   D est-il ouvert ? fermé ? (Justifier).
4. Calculer $Int(D), \overline{D}$ et la frontière de l'adhérence $Fr(\overline{D})$.

Exercice 3 (4 points) Soit $f, g : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x, y) = \frac{x^3y^5}{x^8 + y^8 + x^4y^4}, \qquad g(x, y) = \frac{\sin(x^2y)}{x^2 + y^2}.$$

1. Déterminer si f et g admettent des limites en $(0, 0)$ et les calculer.
2. Montrer que f et g sont définies sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Sont elles continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$?