Université Claude Bernard
L2 MASS 31

Mathématiques
2012-2013

**Correction du Contrôle continu**
**Lundi 15 octobre 2013**

**Durée : 55 minutes.**

**Les documents et les calculatrices sont interdits.**
On prendra soin à justifier les réponses aux exercices.

**Question de Cours (5 minutes maxi, 4 points) :**

1. Donner la définition d'une fonction Lipschitzienne et un exemple.
2. Enoncer le théorème de Heine en définissant les notions utilisées.

**Exercice 1 (4 points)** Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$N(u) = \max\left(|x|, |y|, \frac{2(|x|+|y|)}{3}\right) \text{ si } u = (x, y).$$

1. Montrons que $N$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. - Comme une somme et un maximum de termes positifs est positif, on a $N(u) \geq 0$.
   -Si $N((x,y)) = 0$ alors (comme une maximum de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul) $x = 0$, $yy = 0$ $|x| + |y| = 0$ ce qui implique $(x, y) = 0$
   - $N(\lambda(x,y)) = \max\left(|\lambda x|, |\lambda y|, \frac{2(|\lambda x|+|\lambda y|)}{3}\right) = \max\left(|\lambda||x|, |\lambda||y|, \frac{2(|\lambda||x|+|\lambda||y|)}{3}\right) = |\lambda| \max\left(|x|, |y|, \frac{2(|x|+|y|)}{3}\right.$ $|\lambda| N((x,y))$ (vu $|.|$ est une norme sur $\mathbb{R}$)
   - $N((x,y)+(x',y')) = \max((|x+x'|, |y+y'|, \frac{2(||(x,y)+(x',y')||_1)}{3})_{\leq} \max(|x|+|x'|, |y|+|y'|, \frac{2(||(x,y)||_1+||(x',y')||_1)}{3}) = ||(|x|+|x'|, |y|+|y'|, \frac{2(||(x,y)||_1+||(x',y')||_1)}{3})||_\infty \leq ||(|x|, |y|, \frac{2(||(x,y)||_1)}{3})||_\infty + ||(|x|, |y|, \frac{2(||(x,y)||_1)}{3})||_\infty = N((x,y)) + N((x',y'))$, vu que $|.|$, $||.||_1$ et $||.||_\infty$ sont des normes donc satisfont l'ingéalité triangulaire.
2. $A = \{u \in \mathbb{R}^2, N(u) = 1\} = [-1/2, 1/2] \times \{1, -1\} \cup \{1, -1\} \times [-1/2, 1/2] \cup \{y = 3/2 - x, x \in [1/2, 1]\} \cup \{y = 3/2 + x, x \in [-1, -1/2]\} \cup \{y = -3/2 + x, x \in [1/2, 1]\} \cup \{y = -3/2 - x, x \in [-1, -1/2]\}$ ce qui donne le dessin d'octogone.
   A n'est pas ouvert ,car $x_n = (0, 1 - 1/n) \in A^c$ et $x_n \to (0,1) \in A$ donc $A$ n'est pas fermé ; A est fermé car une norme est continue et $A = N^{-1}(\{1\})$ est l'image réciproque d'une boule fermé par une application continue Son intérieur $Int(A) = \emptyset$ (si $u \in A$ $(1-1/n)u \in A^c$ et tend vers $u$ donc $u \in \overline{A^c}$ et donc $\overline{(}A^c) \supset A \cup A^c = \mathbb{R}^2$ et $Int(A) = \emptyset$) n'est donc pas convexe (par convention).
3. Les normes $N$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes car  est de dimension fini. $C = 1$ convient tels que

$$\forall u \in \mathbb{R}^2,\ ||u||_\infty \leq N(u).$$

**Exercice 2 (9 points)** On considère le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $||.||_\infty$.

1. Soit

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 - x^2 \geq 1, y > 0\} \cup ([0,1] \times \{0\}),$$

   Montrer que $B$ est fermé.

2. Calculer Int(B).
3. Soit

$$D = (\mathbb{Q} \cap [0,1[) \times ]0,1[.$$

   $D$ est-il ouvert ? fermé ? (Justifier).
4. Calculer $Int(D), \overline{D}$ et la frontière de l'adhérence $Fr(\overline{D})$.

**Exercice 3** **(4 points)** Soit $f, g : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x,y) = \frac{x^3 y^5}{x^8 + y^8 + x^4 y^4}, \qquad g(x,y) = \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2}.$$

1. Déterminer si $f$ et $g$ admettent des limites en $(0,0)$ et les calculer.
2. Montrer que $f$ et $g$ sont définies sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Sont elles continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ?