Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 MASS 31 — 2014-2015

**Contrôle continu**
**Mardi 14 octobre 2014**

**Durée : 1 heure.**

**Les documents et les calculatrices sont interdits.**

**Question de Cours (5 minutes maxi, 4 points) :**

1. Donner la définition d'une fonction uniformément continue et un exemple.
2. Donner la définition d'un compact et la caractérisation des compacts de $\mathbb{R}^n$, en donnant une définition de chaque notion du cours employé (dans la définition et la caractérisation).

**On pourra utiliser dans les exercices les normes classiques $||.||_1, ||.||_2, ||.||_\infty$ vues en cours. On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.**

**Exercice 1 (6 points)** Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$N(u) = \max(|x+y|, \sqrt{x^2+y^2}) \text{ si } u = (x,y).$$

1. Montrer que $N$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Tracer $A = \{u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 N(u) = 1\}$.
2. Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x+y| \leq 1, x^2+y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.
   $F$ est-il ouvert ? $F$ est il convexe ? $F$ est il borné ? (Justifier rapidement)
3. Les normes $N$ et $||.||_2$ sont elles équivalentes ?
   Déterminer $C, D > 0$ tels que
   $$\forall u \in \mathbb{R}^2,\ C||u||_2 \leq N(u) \leq D||u||_2.$$

**Exercice 2 (8 points)** On considère le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $||.||_\infty$.

1. Soit
   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < y < 1, 0 < x < 1\} \cup \{(x,y) \ : \ xy > 1\}.$$
   Montrer que $D$ est ouvert.
2. Calculer l'adhérence $\overline{D}$.
3. Soit
   $$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1, -1-x \leq y < 1-x\},$$
   $B$ est-il fermé ? $B$ est il ouvert ? (justifier)
4. Calculer l'adhérence $\overline{B}$, l'intérieur $Int(B)$, et la frontière $Fr(B)$.
5. Soit $C = [0,1] \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Calculer $\overline{C}$.

**Exercice 3 (2 points)** Soit $f, g : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x,y) = \frac{x^3y^3 + x^4y^4}{x^6+y^6}, \qquad g(x,y) = \frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2}.$$

Déterminer si $f$ et $g$ admettent des limites en $(0,0)$ et les calculer.