Université Claude Bernard | Mathématiques
L2 MASS 31 | 2014-2015

Correction du Contrôle continu 1

Exercice 1 (6 points) Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$N(u) = \max(|x+y|, \sqrt{x^2+y^2}) \text{ si } u = (x,y).$$

1. Montrons que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
   - On a $||u||_2 = \sqrt{x^2+y^2} \leq N(u)$ donc $N(u) \geq 0$ et si $N(u) = 0$, alors $\sqrt{x^2+y^2} = 0$ donc $(x,y) = (0,0)$ d'où la séparation.
   -

   $$N(\lambda u) = \max(|\lambda(x+y)|, ||\lambda u||_2) = \max(|\lambda||(x+y)|, |\lambda|\, ||u||_2) = |\lambda| \max(|(x+y)|, ||u||_2) = |\lambda| N(u)$$

   car $|.|$ et $||.||_2$ sont des normes, d'où l'homogénéité.
   -Finissons par montrer l'inégalité triangulaire en utilisant de même celle pour $|.|$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$. Soit $v = (x', y')$.

   $$\begin{aligned} N(u+v) &= \max(|x+y+x'+y'|, ||u+v||_2) \leq \max(|x+y| + |x'+y'|, ||u||_2 + ||v||_2) \\ &= ||(|x+y| + |x'+y'|, ||u||_2 + ||v||_2)||_\infty \leq ||(|x+y|, ||u||_2)||_\infty + ||(|x'+y'|, ||v||_2)||_\infty \\ &\leq N(u) + N(v). \end{aligned}$$

   Donnons des equations pour $A = \{u = (x,y) \in \mathbb{R}^2, N(u) = 1\} \subset [-1,1] \times [-1,1]$.
   Si $xy < 0$ (autrement dit x, y de signes différents) $|x+y| = ||x|-|y|| \leq \max(|x|,|y|) \leq \sqrt{x^2+y^2}$ donc $N(u) = \sqrt{x^2+y^2} = 1$ si et seulement si $x^2+y^2 = 1$.
   Si $xy \geq 0$, $|x+y| = |x|+|y| \geq ||u||_2$ donc $N(u) = |x+y|$ et alors $N(u) = 1$ implique $x+y = \pm 1$.
   Donc A est l'union de 2 quarts de certes et 2 segments de droites :

   $$\begin{aligned} A = \{(x,y), x > 0, y < 0 x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y), x < 0, y > 0 x^2+y^2 = 1\} \cup \\ \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0 y = 1-x\} \cup \{(x,y), x \leq 0, y \leq 0, y = -1-x\} \end{aligned}$$

2. Soit $F = \{(x,y) \ : \ |x+y| \leq 1, x^2+y^2 \leq 1\} = B_{F,N}(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ la boule fermé pour N de centre 0 et de rayon 1.
   F n'est pas ouvert (car $(1+1/n, 0) \notin F$ et tend vers $(1,0) \in F$)F est convexe comme toute boule (voir cours, si l'on a vu que le cas ouvert, c'est l'adhérence de la boule ouverte et l'adhérence d'un convexe est convexe, mais la preuve directe du cas ouvert marche), F est borné comme toute boule (voir cours).
3. Les normes N et $||.||_2$ sont équivalentes car $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie.
   On a déjà vu C=1 marche $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $\underline{||u||_2 \leq N(u)}$ Voyons $N(u) \leq 2||u||_2$ de sorte que $D = 2$ convient. En effet $|x+y| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} = 2||u||_2$ comme $||u||_2 \leq 2||u||_2$ en passant au max on obtient $N(u) \leq 2||u||_2$.

Exercice 2 (8 points) On considère le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $||.||_\infty$.

1. Soit
$$D = \{(x,y) \ : \ 0 < y < 1, 0 < x < 1\} \cup \{(x,y) \ : \ xy > 1\}.$$
D est ouvert comme union d'ouverts car $\{(x,y) \ : \ 0 < y < 1, 0 < x < 1\} = B_{||\cdot||_\infty}((1/2,1/2),1/2)$ est une boule ouverte et $\{(x,y) \ : \ xy > 1\} = f^{-1}(]1,+\infty[)$ est l'image réciproque de l'ouvert $]1,+\infty[$ par l'application continue (car polyonomiale) $f(x,y) = xy$.
2. Calculons l'adhérence $\overline{D}$ et montrons qu'elle est égale à $E = \{(x,y) \ : \ 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,y) \ : \ xy \geq 1\}$. D'abord E est fermé comme union fini des fermés $\{(x,y) \ : \ 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\} = B_{F||\cdot||_\infty}((1/2,1/2),1/2)$ qui est une boule fermé donc fermé (cf. TD) et $\{(x,y) \ : \ xy \geq 1\} = f^{-1}([1,+\infty[)$ image réciproque d'un fermé par la même application continue.
Or $D \subset E$ et E fermé donc comme l'adhérence est le plus petit fermé contenant D, on a $\overline{D} \subset E$. Réciproquement, $E - D \subset \{(x,y) \ : \ xy = 1\} \cup \{0,1\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0,1\}$.
Or pour x,y tel $xy = 1$ $(x_n,y_n) = (x + y/|y|n, y) \to (x,y)$ et $x_n y_n = (x + y/|y|n)y = xy + y^2/|y|n = 1 + |y|/n > 1$ donc $(x_n,y_n) \in D$ et la limite $(x,y) \in \overline{D}$ par caractérisation séquentielle de l'adhérence.
De même pour $x \in [0,1], D \ni (1/n,x) \to (0,x) \in \overline{D}, D \ni (1-1/n,x) \to (1,x) \in \overline{D}, D \ni (x,1/n) \to (x,0) \in \overline{D}, D \ni (x,1-1/n) \to (x,1) \in \overline{D}$.
En bilan $E - D \subset \overline{D}$ mais comme $D \subset \overline{D}$ on déduit $E \subset \overline{D}$ et donc $E = \overline{D}$.
3. Soit
$$B = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1, -1 - x \leq y < 1 - x\},$$
B n'est pas fermé car $(1/2-1/n, 1/2-1/n) \in B$ mais $(1/2-1/n, 1/2-1/n) \to (1/2,1/2) \notin B$ (car $1/2 + 1/2 = 1$ pas strictement plus petit que 1), donc par caractérisation séquentielle des fermés, B n'est pas fermé. B n'est pas ouvert car B^c n'est pas fermé pour la même raison car $(-1/2-1/n, -1/2-1/n) \in B^c$ et tend vers $(-1/2,-1/2) \in B$.
4. Montrons que $\overline{B} = F$ de l'exo 1 d'abord on a vu F fermé car boule fermé et $B \subset F$ donc $\overline{B} \subset F$. Réciproquement, comme $B_N(0,1) \subset B$, si $u \in F$ il suffit de prendre comme en TD $u_n = (1-1/n)u/N(u)$ de sorte que $N(u_n) = (1-1/n) < 1$ donc $u_n \in B$ et $u_n \to u$ donc par caractérisation séquentielle de l'adhérence $F \subset \overline{B}$.
Montr que l'intérieur $Int(B) = B_N(0,1)$. On a vu en TD $Int(F) = B_N(0,1)$ Or $B_N(0,1) \subset B \subset F$ donc en passant à l'intérieur
$$B_N(0,1) = Int(B_N(0,1)) \subset Int(B) \subset Int(F) = B_N(0,1)$$
donc on déduit le résultat.
La frontière $Fr(B) = \overline{B} - (Int(B)) = \{u, N(u) = 1\} = A$ de l'exo 1.
5. $C \subset [0,1]$ fermé donc $\overline{C} \subset [0,1]$ et si $x \in [0,1]$, $x_n = Ent(nx)/n \in C$ et $x_n \to x$ (cf cours) donc $x \in \overline{C}$ et $\overline{C} = [0,1]$.

Exercice 3 (2 points)

Comme $f(1/n,0) = 0 \to 0, f(1/n,1/n) = (1/n^6 + 1/n^8)/(2/n^6) \to 1/2$ donc f n'a pas de limite en $(0,0)$. vu pour $r = x^2y^2 \geq 0$, $\ln(1+r) = |\ln(1+r)| \leq r$ on déduit
$$|g(x,y)| = \frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = ||(x,y)||_2^2 \to_{(x,y)\to(0,0)} 0.$$