Universités Lyon 1 et Lyon 2

L2 - MASS 31 2009-2010

Contrôle continu
Mercredi 24 Mars 2010

Durée : 1heure

Les documents et les calculatrices sont interdits

Exercice 1. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on définit $N(u) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.
Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 2. Soit U un ouvert de E. On pose $C := \{\lambda x \ : \ \lambda > 0, \ x \in U\}$.

1) Soit $\lambda > 0$ fixé. Montrer que $\{\lambda x \ : \ x \in U\}$ est un ouvert de E.

2) Montrer que C est un ouvert de E.

3) On suppose $0 \in U$.

   a) Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\dfrac{\varepsilon}{2\|x\|}x \in U$.

   b) En déduire que $C = E$.

Exercice 3. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, on appelle diamètre de A le nombre $d(A) := \sup_{(x,y)\in A^2} |x - y|$.

1) Déterminer $d(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $d(A) = d(\overline{A})$ où $\overline{A}$ désigne l'adhérence de A.