

Contrôle continu
Lundi 17 Octobre 2011

Durée : 50 mn

Les documents et les calculatrices sont interdits

Exercice 1. Soit $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$N(u) := |2x - y| + |x + y| \text{ pour } u := (x, y).$$

- 1) Montrer que N est une norme sur \mathbb{R}^2 .
- 2) Soit $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |2x - y| < 1 - |x + y|\}$.
L'ensemble D est-il un convexe de \mathbb{R}^2 ?
- 3) Les normes N et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? si oui, déterminer $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha\|\cdot\|_1 \leq N \leq \beta\|\cdot\|_1$.

Exercice 2. On considère le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^2 muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. On pose $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < x\}$.

- 1) Montrer que A est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- 2) $B'((-2, 1), 3)$ désigne la boule fermée de centre $(-2, 1)$ et de rayon 3. On pose:

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\} \cup B'((-2, 1), 3).$$

Montrer que D est un fermé de \mathbb{R}^2 .

Exercice 3. On pose $A := {}^c \mathbb{Q}$ le complémentaire de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

- 1) Déterminer $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\overset{\circ}{\mathbb{Q}}$.
- 2) Déterminer \overline{A} et $\overset{\circ}{A}$.

Exercice 4. Soit A une partie non vide et minorée de \mathbb{R} . On pose $a := \inf(A)$.
Montrer que $a \in \overline{A}$.