Université Claude Bernard | Mathématiques
L2 MASS 31 | 2012-2013

Contrôle continu
Lundi 19 novembre 2012

Durée : 1 heure.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours (5 minutes maxi, 4 points) :

1. Énoncer le théorème de différentiation des fonctions composées.
2. Énoncer le théorème de Taylor-Young à l'ordre 2.

Exercice 1 (9 points + Bonus 1 point) Soit $g : \mathbb{R}\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

On note $|Y|$ la valeur absolue de Y. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(X,Y) = Y|Y|g(X-1,|Y|) \text{ si } Y \neq 0,\ \ f(X,0) = 0.$$

1. Calculer, si elles existent, les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ en tout point de $\mathbb{R}\times]0,\infty[$.
2. En déduire que $x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + g = 0$.
3. **Bonus** Remontrer le résultat du (2) sans calculs de dérivées partielles en utilisant un résultat du cours que l'on énoncera.
4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
5. Calculer, si elles existent, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial X}$, $\frac{\partial f}{\partial Y}$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.
6. f est elle de classe $\mathcal{C}^1$? f est elle différentiable en $O = (0,0)$? si oui calculer $df(O)$.
7. Calculer, si elles existent, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,\infty[$.
8. En déduire une autre équation au dérivée partielle (d'ordre 2) pour g.

Exercice 2 (7 points) Soient $U =]0,\infty[\times\mathbb{R}$ et $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x > |y|\}$.

On rappelle la définition des fonctions cosinus hyperbolique $\text{ch}(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ et sinus hyperbolique $\text{sh}(t) = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$.

Soit $\varphi : U \to V$ l'application définie par :

$$\varphi(r,\eta) = (r\ \text{ch}(\eta), r\ \text{sh}(\eta)).$$

Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F = f \circ \varphi$.

1. Montrer que V est un ouvert et que $(\text{ch}(t))^2 - (\text{sh}(t))^2 = 1$.
2. Montrer que φ est un homéomorphisme de U sur V.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \eta}$, en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.
4. Trouver les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur V tel que :

$$\forall (x,y) \in V, \quad y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$