Université Claude Bernard
L2 MASS 31

Mathématiques
2012-2013

Contrôle continu
Lundi 19 novembre 2012

Correction

Exercice 1 (9 points + Bonus 1 point) Soit $g : \mathbb{R}\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(X,Y) = Y|Y|g(X-1,|Y|) \text{ si } Y \neq 0,\ \ f(X,0) = 0.$$

1. g est $\mathcal{C}^\infty$ comme quotients de polynômes qui ne s'annulent pas pour $y > 0$.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{(x^2+y^2)} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

2.

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + g = \frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2y}{(x^2+y^2)} - \frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y}{(x^2+y^2)} - \frac{2(x^2+y^2)y}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

3. **Bonus** Par le théorème d'Euler, il suffit de vérifier que est g positivement homogène de degré -1, mais $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ est bien un cône vu $y > 0, t > 0$ implique $ty > 0$. g est bien $\mathcal{C}^1$ et $g(tx,ty) = g(x,y)/t$.
4. On a vu g continue sur son domaine de définition. Par produit et composée f est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Il reste à voir $\lim_{(X,Y)\to(X_0,0)} f(X,Y) \to 0$. (pour la continuité sur $\mathbb{R}\times\{0\}$.) Vu $f(X,0) = f(X_0,0) = 0$ il suffit de borner pour $Y \neq 0$

$$|f(X,Y) - f(X_0,0)| = \frac{|Y|^3}{(X-1)^2+Y^2} \leq |Y| \to_{(X,Y)\to(X_0,0)} 0$$

5. Pour $Y \neq 0$ les dérivées partielles de f existent par composition (vu g $\mathcal{C}^1$) et multiplication (on utilise $\partial|Y|/\partial Y = Y/|Y|$ c'est à dire vaut le signe de Y sur $Y \neq 0$).

$$\frac{\partial f}{\partial X} = Y|Y|\frac{\partial g}{\partial x}(X-1,|Y|) = \frac{-2(X-1)|Y|^2Y}{((X-1)^2+Y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = (Y+|Y|)g(X-1,|Y|) + Y|Y|\frac{Y}{|Y|}\frac{\partial g}{\partial y}(X-1,|Y|) = \frac{(Y+|Y|)|Y|+Y^2}{(X-1)^2+Y^2} - \frac{2Y^4}{((X-1)^2+Y^2)^2}.$$

Pour $Y = 0$ il est évident que $\frac{\partial f}{\partial X}(x,0) = 0$ (dérivée de la fonction nulle)
Pour calculer la seconde dérivée partielle en $Y = 0$, on revient à la définition :
$\frac{f(X,Y)-f(X,0)}{Y} = \frac{|Y|^2}{(X-1)^2+Y^2}$ ce qui converge vers 0 si $X \neq 1$ et $Y \to 0$ et vaut 1 si $X = 1$ d'où $\frac{\partial f}{\partial Y}(X,0) = 0$ si $X \neq 1$ et $\frac{\partial f}{\partial Y}(1,0) = 1$

6. f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ car $\frac{\partial f}{\partial Y}$ n'est pas continue en $(1,0)$. Par contre f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$ (évident par les opérations usuelles en dehors de $Y=0$ et par limite directe en $Y=0$) en particulier, on en déduit d'après le cours que f est différentiable en $O=(0,0)$. Par le cours
$$df(O).(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial X}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial Y}(0,0)h_2 = 0.$$
7.
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8x^2y}{(x^2+y^2)^3},$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$
8.
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 2 (7 points) Soient $U =]0,\infty[\times\mathbb{R}$ et $V = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x > |y|\}$.

On rappelle la définition des fonctions cosinus hyperboliques $\mathrm{ch}(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ et sinus hyperboliques $\mathrm{sh}(t) = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$.

Soit $\varphi : U \to V$ l'application définie par :
$$\varphi(r,\eta) = (r\ \mathrm{ch}(\eta), r\ \mathrm{sh}(\eta)).$$
Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F = f\circ\varphi$.

1. $V = h^{-1}(]0,+\infty[)$ est un ouvert comme image inverse d'un ouvert par l'application continue $h(x,y) = x - |y|$.
$$(\mathrm{ch}(t))^2 - (\mathrm{sh}(t))^2 = \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4} - \frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4} = 1.$$
2. φ est bien à valeur dans V car $ch(t) > |sh(t)|$, vu $e^t>0$. Elle est clairement continue par composée de fonctions continues à une variable, projection et produit. on résout $x = rch(t), y = rsh(t)$, vu $x^2-y^2=r^2$ d'après le 1 et $x/r+y/r = e^t$ d'où $r = \sqrt{x^2-y^2}$, $t = \ln(\frac{x+y}{\sqrt{x^2-y^2}}) = \ln(\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}})$. donc
$$\phi^{-1}(x,y) = (\sqrt{x^2-y^2}, \frac{1}{2}\ln(\frac{x+y}{x-y}))$$
est bien définie et continue sur V par composée d'application linéaires et de fonctions d'une variable continues.
3. F est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ et par le cours
$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = \mathrm{ch}(\eta)\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi + \mathrm{sh}(\eta)\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi$$
,
$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\frac{\partial\varphi_1}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\frac{\partial\varphi_2}{\partial \eta} = r\mathrm{sh}(\eta)\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi + r\mathrm{ch}(\eta)\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi,$$
4. Pour une solution f de $y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ on a $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$ d'où $F(r,\eta) = F(r,0) = G(r)$ pour une fonction G $\mathcal{C}^1$, autrement dit $f(x,y) = F\circ\varphi^{-1}(x,y) = H(x^2-y^2)$ pour une certaine fonction H $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$ $(H(t) = G(\sqrt{t}))$