Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 MASS 31 — 2013-2014

Contrôle continu
Mardi 12 novembre 2013

Durée : 1H.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours (5 minutes maxi, 4 points) :

1. Donner la définition d'une fonction différentiable.
2. Enoncer la formule de Taylor avec reste intégrale dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1 (7 points + Bonus 1 point) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 + (y-x)^2} \text{ si } x \neq 0,\ \ f(0,y) = -y^2.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer, si elles existent, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire que $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - 2f = 0$.
4. **Bonus** Remontrer le résultat du (2) sans calculs de dérivées partielles en utilisant un résultat du cours que l'on énoncera.
5. f est elle de classe $\mathcal{C}^1$?
6. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. f est elle de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 2 (4 points) Soient les ensembles :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2y^6 \leq 3\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)(x-3y) = 1\}$$

Soit la fonction $g : A \to \mathbb{R}$ définie sur A par

$$g(x,y) = \sqrt{|x|} + y^2.$$

1. A et B sont ils compacts ?
2. g est elle uniformément continue ? Montrer que g n'est pas lipschitzienne.

Exercice 3 (5 points+ Bonus 1 point) Soient $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi(u,v) = (u, v - u^3).$$

1. Montrer que Φ est un homéomorphisme.
2. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ et $F = f \circ \Phi$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}$, en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.
3. Trouver les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

4. **Bonus** Trouver les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y.$$