Correction du Contrôle continu

Exercice 1 (7 points + Bonus 1 point) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 + (y-x)^2} \text{ si } x \neq 0, \;\; f(0,y) = -y^2.$$

1. La première formule pour f est valable en dehors de $(0,0)$. En defors de $(0,0)$ f est quotient de deux polynômes dont le denominateur ne s'annule pas (en effet $x^2+(y-x)^2 = 0$ si et seulement si $x = 0, y-x = 0$ soit $(x,y) = (0,0)$), donc f est C^∞ donc continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
   Reste à voir la continuité de f en $(0,0)$.

$$|f(x,y)| = \frac{|x^4 - y^2(y-x+x)^2|}{x^2+(y-x)^2} \leq \frac{x^4 + y^2(2(y-x)^2 + 2x^2)}{x^2+(y-x)^2} \leq x^2 + 2y^2.$$

   On a utilisé pour $a, b \geq 0$ $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2a^2 + 2b^2$ car $ab \leq (a^2+b^2)/2$. (Cauchy-Schwarz) Comme le membre de droite tend vers 0 en $(0,0)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ donc f est continue en $(0,0)$ et finalement sur $\mathbb{R}^2$

2. EN dehors de $(0,0)$ on a déjà vu l'existence et on calcule :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^3}{x^2+(y-x)^2} - \frac{(x^4-y^4)(2x - 2(y-x))}{(x^2+(y-x)^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4y^3}{x^2+(y-x)^2} - \frac{(x^4-y^4)(2(y-x))}{(x^2+(y-x)^2)^2}.$$

   En $(0,0)$ on repart de la définition : comme $f(x,0) = x^2/2$ on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = x$ en particulier $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Comme $f(0,y) = -y^2$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = -2y$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

3. L'équation est évidente en $(0,0)$ et si $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{4x^4}{x^2+(y-x)^2} + \frac{(x^4-y^4)(2yx-4x^2)}{(x^2+(y-x)^2)^2} - \frac{4y^4}{x^2+(y-x)^2} - \frac{y(x^4-y^4)(2(y-x))}{(x^2+(y-x)^2)^2} \\
&= 4f(x,y) - \frac{(x^4-y^4)(2yx - 4x^2 - 2yy^2 + 2yx)}{(x^2+(y-x)^2)^2} \\
&= 4f(x,y) - \frac{2(x^4-y^4)(x^2+(y-x)^2)}{(x^2+(y-x)^2)^2} \\
&= 2f(x,y).
\end{aligned}$$

4. **Bonus** f est homogène de degré 2 car $f(tx,ty) = \frac{(tx)^4-(ty)^4}{(tx)^2+(ty-tx)^2} = t^2 f(x,y)$. Donc par le théorème d'Euler (à enoncer) comme f admet des dérivées partielles on déduit l'équation précédente.

5. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ Par ce qu'on a dit au (1) il suffit de le voir que les dérivées partielles sont continues en $(0,0)$. Or on borne :

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)| \leq 4|x| + \frac{(x^4 + 4(x^2+(y-x)^2)^2)(4|x|+2[y|)}{(x^2+(y-x)^2)^2} \leq 4|x| + 5(4|x|+2[y|),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \leq 4|y| + 5(2|x| + 2[y|).$$

et les bornes tendent vers 0 en $(0,0)$ donc les dérivées partielles tendent vers $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

6.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{-2y^5}{y^4} = -2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \frac{2x^5}{4x^4} = \frac{x}{2}.$$

Donc en dérivant $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{1}{2} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -2$. donc par le théorème de Schwarz, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 2 (4 points)

1. $A = h^{-1}([0,3])$ avec $h(x,y) = x^2 + 2y^6$ polynomiale donc continue donc A est fermé comme image réciproque d'une boule fermé par une application continue. De plus $(x,y) \in A$ implique $x^2 \leq 3$, $y^2 \leq 2y^2 \leq 3$ donc $A \subset [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]^2$ donc A est borné, donc A est fermé et borné en dimension finie, donc compact. Montrons que B n'est pas borné donc non compact. Il suffit de résoudre $x_n + y_n = n$, $x_n - 3y_n = 1/n$ soit $y_n = \frac{1}{4}(n - 1/n)$, $x_n = \frac{3}{4}(n - 1/n) + 1/n$, donc $(x_n, y_n) \in B$ et $x_n + y_n = n \to \infty$ donc B n'est pas bornée.
2. g est uniformément continue par le théorème de Heine car continue (comme somme de deux fonctions à 1 variable continue) sur le compact A. Comme g est $\mathcal{C}^1$ sur $A - (0 \times \mathbb{R})$ si elle était lipschitzienne il en serait de même de $g(x,0)$, et sa dérivée partielle par rapport à x serait bornée (par le théorème des accroissements finis) ce qui n'est pas le cas puisque $\frac{\partial g}{\partial x} = signe(x)/2\sqrt{|x|} \to_{x \to 0^\pm} \pm\infty$.

Exercice 3 (5 points+ Bonus 1 point) Soient $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi(u,v) = (u, v - u^3).$$

1. En résolvant un système on trouve $\Phi^{-1}(x,y) = (x, y + x^3)$ donc Φ est bijective et comme Φ, Φ^{-1} sont à coordonnées polynomiales donc continues (même $\mathcal{C}^\infty$), Φ est un homéomorphisme.
2. Comme Φ est $\mathcal{C}^1$ on a $F = f \circ \Phi$ de classe $\mathcal{C}^1$ par le théorème de dérivation des fonctions composées et exprimer $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \circ \Phi - 3x^2 \frac{\partial f}{\partial y} \circ \Phi, \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y} \circ \Phi$
3. Pour f $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$
on a $\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 0$ donc $F(u,v) = F(0,v) = h(v)$ pour une fonction $\mathcal{C}^1$ h donc $f(x,y) = h(y + x^3)$ avec h $\mathcal{C}^1$ en utilisant l'inverse du (1).
4. **Bonus** Une fonction f $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y.$$
est telle que F vérifie $\frac{\partial F}{\partial u} = v - u^3 = \frac{\partial (uv - u^4/4)}{\partial u}$. donc $F(u,v) - uv + \frac{u^4}{4} = h(v)$ est indépendant de u donc
$$f(x,y) = x(y + x^3) - \frac{x^4}{4} + h(y + x^3),$$
avec h une fonction $\mathcal{C}^1$.