Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 MASS 31 — 2014-2015

Contrôle continu
Mardi 4 novembre 2014

Durée : 1H.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours (5 minutes maxi, 4 points) :

1. Donner la définition d'une fonction homogène et énoncer le théorème d'Euler.
2. Enoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

Exercice 1 (5 points+ Bonus 1 point) Soient les ensembles :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^4 + y^6 \leq 4\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2y^2 + 3xy = 1\}$$

Soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \inf\{|x - X| + 2|y - Y| + |x|, (X,Y) \in A\}.$$

1. A et B sont ils compacts ?
2. **Bonus** Existe-t-il $(X,Y) \in A$ (dépendant de (x,y)) tel que $g(x,y) = |x - X| + 2|y - Y| + |x|$? (justifier)
3. g est elle lipschitzienne ? uniformément continue ?

Exercice 2 (6 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^3(y-2)}{x^2 + (y-2)^2} \text{ si } x \neq 0, \ f(0,y) = 0.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer, si elles existent, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est elle de classe $\mathcal{C}^1$?
4. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,2)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,2)$. f est elle de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 3 (5 points+ Bonus 2 points) Soient $\Phi : \mathbb{R}^2 \to]0,+\infty[^2$ définie par

$$\Phi(u,v) = (e^{u+v}, e^{u-v}).$$

1. Montrer que Φ est un homéomorphisme. Cela donne un changement de variable $(t,x) = \Phi(u,v)$.
2. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$ et $F = f \circ \Phi$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}$, en fonction de $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}$.
3. Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$ telles que :
$$\forall (t,x) \in]0,\infty[^2, \quad t\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = x\frac{\partial f}{\partial x}(t,x).$$
4. **Bonus** Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$ telles que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x).$$

   Indication : calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$.