Université Claude Bernard — Mathématiques

L2 MASS 31 — 2014-2015

Correction du Contrôle continu 2

Exercice 1 (5 points+ Bonus 1 point) Soient

$A = \{(x,y) : x^4+y^6 \leq 4\}$, $\quad B = \{(x,y) : x^2+2y^2+3xy = 1\}, g(x,y) = \inf\{|x-X|+2|y-Y|+|x|, (X,Y) \in A\}$.

1. $A = f^{-1}([0,4])$ est l'image réciproque du fermé $[0,4]$ par l'application f définie par $f(x,y) = x^4+y^6$, f est continue car polynomiale, donc A est fermé. De plus si $(x,y) \in A$, $|x|^4 \leq 4$ donc $|x| \leq \sqrt{2} \leq 2$ et de même $|y| \leq 2^{1/3} \leq 2$ donc $A \subset [-2,2]^2 = B_{||.||_\infty}(0,2)$ donc A est borné. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension fini, A fermé borné est donc compact.

   Montrons que B n'est pas borné donc pas compact. $x^2+2y^2+3xy = (x+y)(x+2y) = 1$, donc on cherche (par exemple) une solution de $x+y = n$, $(x+2y) = 1/n$ soit $y = 1/n - n$ $x = n - y = 2n - 1/n$ donc $(x_n, y_n) = (1/n - n, 2n - 1/n) \in B$ et $|x_n| \to \infty$ donc B n'est en effet par borné.

2. **Bonus** Il existe bien $(X,Y) \in A$ (dépendant de (x,y)) tel que $g(x,y) = |x-X|+2|y-Y|+|x|$ car $h(X,Y) = |x-X|+2|y-Y|+|x|$ est une fonction continue (par composition de normes et d'applications linéaires) sur le compact A donc atteint sa borne inférieure (par définition $g(x,y)$) d'après le théorème du cours.

3. Montrons que g est lipschitzienne (disons pour $||.||_1$ puisqu'on peut choisir la norme par équivalence des normes en dimension finie) donc uniformément continue. Notons que $N(x,y) = |x|+2|y| = ||(x,2y)||_1$ est une norme (par composée d'une norme et d'une application linéaire), on n'aura en fait besoin seulement de l'inégalité triangulaire de laquelle on déduit si $h(x,y) = N(x-X, y-Y)+|x|$:

   $$h(x,y) = N(x-x'+x'-X, y-y'+y'-Y)+|x| \leq N(x-x', y-y')+N(x'-X, y'-Y)+|x-x'|+|x'|$$

   En passant à l'infémum sur A on déduit :

   $$g(x,y) \leq N(x-x', y-y')+|x-x'|+g(x',y')$$

   Par symétrie on déduit que g est 2-lipschitzienne :

   $$|g(x,y)-g(x',y')| \leq N(x-x', y-y')+|x-x'| = 2||(x-x', y-y')||_1.$$

Exercice 2 (6 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x,y) = \frac{x^3(y-2)}{x^2+(y-2)^2}$ si $x \neq 0$, $f(0,y) = 0$.

1. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. en dehors de $(0,2)$ on a $f(x,y) = \frac{x^3(y-2)}{x^2+(y-2)^2}$ donc f est quotient de 2 polynômes à dénominateur non nul, donc f est C^∞ comme quotient à dénominateur non nulle de fonctions C^∞.

   Il reste à voir la continuité en $(0,2)$ mais en effet on a $|f(x,y)-f(0,2)| = |f(x,y)| \leq \frac{(x^2+(y-2)^2)^2}{x^2+(y-2)^2} = (x^2+(y-2)^2) \to 0$ en (0,2) (on a utilisé $|x| \leq \sqrt{x^2+(y-2)^2}, |y-2| \leq \sqrt{x^2+(y-2)^2}$.)

2. On a vu que les dérivées partielles existent en dehors de (0,2) et par opérations usuelles on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(y-2)}{x^2+(y-2)^2} - \frac{2x^4(y-2)}{(x^2+(y-2)^2)^2}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3}{x^2+(y-2)^2} - \frac{2x^3(y-2)^2}{(x^2+(y-2)^2)^2}.$$

En $(0,2)$ on regarde les fonctions partielles $f(x,2)=0,\ f(0,y)=0$ dont les dérivées en 0 et 2 donnent :$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = 0$.

3. On a vue que f est elle de classe $\mathcal{C}^1$ en dehors de $(0,2)$ il reste à voir la continuité des dérivées partielles en $(0,2)$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,2)\right| \leq \frac{3x^2|y-2|}{x^2+(y-2)^2} + \frac{2x^4|y-2|}{(x^2+(y-2)^2)^2} \leq 5\sqrt{x^2+(y-2)^2} \to_{(x,y)\to(0,2)} 0,$$

en utilisant les mêmes bornes qu'au 1. De même

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)\right| \leq \frac{|x|^3}{x^2+(y-2)^2} + \frac{2|x|^3(y-2)^2}{(x^2+(y-2)^2)^2} \leq 3\sqrt{x^2+(y-2)^2} \to_{(x,y)\to(0,2)} 0.$$

Donc f est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

4. Calculons $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,2)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,2)$. On regarde les fonctions partielles $l(x) := \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{30^2(y-2)}{0^2+(y-2)^2} - \frac{20^4(y-2)}{(0^2+(y-2)^2)^2} = 0$ donc on déduit en dérivant en 2 que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,2) = l'(2) = 0$.
De même, on a : $k(x) := \frac{\partial f}{\partial y}(x,2) = \frac{x^3}{x^2+(2-2)^2} - \frac{2x^3(2-2)^2}{(x^2+(2-2)^2)^2} = x$ donc en dérivant en $x=0$ on déduit : $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,2) = k'(0) = 1$. Donc par le théorème de Schwarz f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ car $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,2) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,2)$.

Exercice 3 (5 points+ Bonus 2 points) Soient $\Phi : \mathbb{R}^2 \to]0,+\infty[^2$ définie par $\Phi(u,v) = (e^{u+v}, e^{u-v})$.

1. Φ est $\mathcal{C}^\infty$ car ces coordonnées sont des composées de fonctions $\mathcal{C}^\infty$: les applications linéaires $(u,v)\mapsto u+v, (u,v)\mapsto u-v$, et a fonction $\mathcal{C}^\infty$ exponentielle. On résoud $(t,x) = \Phi(u,v)$ pour $t>0, x>0$ qui donne une unique solution $u = \frac{\ln(x)+\ln(t)}{2}, u = \frac{\ln(t)-\ln(x)}{2}$ donc

$$\Phi^{-1}(x,t) = (\frac{\ln(t)+\ln(x)}{2}, \frac{\ln(t)-\ln(x)}{2}).$$

Or Φ^{-1} est continue car ces coordonnées sont des composées de fonctions continues (ln et des applications linéaires) donc Φ et Φ^{-1} sont continues donc Φ est un homéomorphisqme.

2. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$ et $F = f\circ\Phi$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ par composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ car on a vu que Φ est $\mathcal{C}^\infty$ Par le théorème des fonctions composées , on a :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = e^{u+v}\frac{\partial f}{\partial t}(e^{u+v}, e^{u-v}) + e^{u-v}\frac{\partial f}{\partial x}(e^{u+v}, e^{u-v})\ , \frac{\partial F}{\partial v} = e^{u+v}\frac{\partial f}{\partial t}(e^{u+v}, e^{u-v}) - e^{u-v}\frac{\partial f}{\partial x}(e^{u+v}, e^{u-v}).$$

3. Si f $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$ vérifie $t\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = x\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ on déduit que $\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = 0$, Donc $F(u,v) = F(u,0) = g(u)$ soit $f(t,x) = g\circ\Phi_1^{-1}(t,x) = g(\frac{\ln(t)+\ln(x)}{2})$ avec g de classe $\mathcal{C}^1$ qui donnent toutes les solutions.

4. **Bonus** Si f $\mathcal{C}^2$ (avec $t^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$) sur $]0,+\infty[^2$ par composition F est $\mathcal{C}^2$ et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(u,v) = (t\frac{\partial f}{\partial t} - x\frac{\partial f}{\partial x} + t^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(e^{u+v}, e^{u-v}) = \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$$

en appliquant l'équation et le 3. Donc $\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial F}{\partial u} - F) = 0$ donc la fonction est constante en v soit $\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) - F(u,v) = \frac{\partial F}{\partial u}(u,0) - F(u,0)$ Soit $g(u) = F(u,v) - F(u,0)$ on vient de déduire $g'(u) = g(u)$ donc $g(u) = g(0)e^u$ soit finalement

$$F(u,v) - F(u,0) = e^u(F(0,v) - F(0,0)),$$

et en recomposant par Φ^{-1} $f(t,x) = F(\frac{\ln(t)+\ln(x)}{2}, 0) + \sqrt{xt}(F(0, \frac{\ln(t)-\ln(x)}{2}) - F(0,0)) = f(\sqrt{tx}, \sqrt{tx}) + \sqrt{xt}(f(\sqrt{\frac{t}{x}}, \sqrt{\frac{x}{t}}) - f(1,1))$ Donc si on pose $f_1(x) = f(x,x)$, $f_2(x) = f(x, x^{-1}) - f(1,1)$ 2 fonctions $\mathcal{C}^2$ dont la deuxième s'annule en 1, la solution générale est de la forme

$$f(t,x) = f_1(\sqrt{tx}) + \sqrt{xt}f_2(\sqrt{\frac{t}{x}}).$$