Contrôle continu
Mercredi 21 Avril 2010

Durée : 1heure

Les documents et les calculatrices sont interdits

Exercice 1.

1) Montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{1}{2}(x^2+4y^2) \leq x^2+2xy+4y^2$.

2) En déduire $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+4y^2\sin(xy)}{\sqrt{x^2+2xy+4y^2}}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.
Etudier $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^4+y^4}$.
Etudier $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Exercice 4. Soit $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y > 1\}$ et $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y < 0\}$.
On considère la fonction $\varphi : U \longrightarrow V$ définie par $\varphi(x,y) = (xy, 1-y)$.

1) Justifier que φ est une application.

2) Montrer que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

3) Montrer que φ est un homéomorphisme et expliciter φ^{-1}.

Exercice 5. Soit $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^4+y^4 \leq 16\}$.

1) Montrer que A est un compact de $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $B := \{x^3 - y^2 \ :\ (x,y) \in A\}$.
   L'ensemble B est-il un compact de $\mathbb{R}$?