Université Claude Bernard Lyon 1

L2 - MASS 31 2011-2012

Contrôle continu n° 2
Lundi 14 Novembre 2011

Durée : 1H

Les documents et les calculatrices sont interdits

Exercice 1. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5-y^5}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer, si elles existent, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

3) On pose $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 2y^4 \leq 32\}$. Montrer que A est un compact de $\mathbb{R}^2$.

4) Expliquer pourquoi il existe deux éléments u et v de A tels que $f(u) \leq f(w) \leq f(v)$ pour tout $w \in A$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^4+y^4}$.
Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 3.

1) On considère $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\Phi(u,v) = (3u+7v, 5u-2v)$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On pose $F := f \circ \Phi$.
Montrer que F a des dérivées partielles premières $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$ et les calculer en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2) Résoudre $3\frac{\partial f}{\partial x} + 5\frac{\partial f}{\partial y} = 5x - 3y$, où $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.