Université Claude Bernard — Mathématiques

L2 MASS 31 — 2012-2013

Contrôle continu
Lundi 10 Décembre 2012

Durée : 1 heure.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours (5 minutes maxi, 4 points) :

1. Donner la définition d'un difféomorphisme local.
2. Énoncer le théorème des fonctions implicites.

Exercice 1 (5 points) Trouver les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6}.$$

En utilisant des fonctions de 1 variable, montrer que ces extrema locaux ne sont pas globaux.

Exercice 2 (6 points) On rappelle la définition du produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Pour $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,$Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$:$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

On définit la fonction $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par :

$$g(X,Y) = \frac{X\langle X,Y\rangle}{\langle X,X\rangle + \langle Y,Y\rangle} \text{ si } (X,Y) \neq (0_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}^n}), \quad g(0_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}^n}) = 0.$$

1. Calculer, en tout point de $\mathbb{R}^{2n}$ et en utilisant la définition, la différentielle de $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la fonction définie par $h(X,Y) = \langle X, Y\rangle$.
2. Calculer, si elle existe, la différentielle de g sur $\mathbb{R}^{2n} - \{(0_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}^n})\}$ ($0_{\mathbb{R}^n} = (0, ..., 0)$)
3. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial y_i}$ de g en $(0_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}^n})$.
4. g est elle de classe $\mathcal{C}^1$?
5. g est elle différentiable en $(0, ..., 0)$? Si oui calculer sa différentielle.
6. Montrer que g est positivement homogène, d'un degré que l'on précisera.

Exercice 3 (5 points + Bonus 1 point) Soient $U =]0, \infty[\times \mathbb{R}$ et $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 + xy > 0\}$.

Soient $F : U \to \mathbb{R}$ et $G : V \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$F(X,Y) = \ln(1+X) - X + \frac{Y^2}{4}, \quad G(x,y) = F(xy, x^2+y^2) = \ln(1+xy) - xy + \frac{(x^2+y^2)^2}{4}.$$

1. Montrer que V est un ouvert.
2. Montrer que $(0,0)$ est l'unique point critique de G.
3. Calculer la matrice hessienne de G en $(0,0)$. Que peut on déduire de la condition suffisante d'ordre 2 pour les extrema ?
4. Donner un développement limité (Taylor-Young) à l'ordre 2 pour F en $(0,0)$.
5. (**Bonus**) Montrer que l'on a le développement limité suivant pour G en $(0,0)$:

$$G(x,y) = \frac{(x^2-y^2)^2 + (x^2+y^2)^2}{8} + o((x^2+y^2)^2).$$

   En déduire que $(0,0)$ est un minimum local strict de G.