Université Claude Bernard
L2 MASS 31

Mathématiques
2012-2013

Contrôle continu
Lundi 10 Décembre 2012

Correction.

Exercice 1 Les points critiques de f satisfont $x^2y+x=0=(x^3+y)/3$ soit $y=-x^3$ et $-x^5+x=0$ soit $x=0,-1$ ou 1. On en déduit que les points critiques de f sont $(0,0)$ $(1,-1)$ et $(-1,1)$. La hessienne de f : $Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 2xy+1 & x^2 \\ x^2 & 1/3 \end{pmatrix}$ En $(0,0)$ $rt-s^2=1/3>0$ et $r=1>0$ donc $(0,0)$ est un minimum local strict. En $(1,-1)$ ou $(-1,1)$ $rt-s^2=-1/3-1<0$, ce ne sont donc pas des extrema (mais des points selles).

$f(x,-x)=2x^2/3-x^4/3\to_{x\to\infty}-\infty$.

$(0,0)$ n'est donc pas un minimum global.

Exercice 2

1. $h(X+H,Y+L)=h(X,Y)+\langle H,Y\rangle+\langle X,L\rangle+\langle H,L\rangle$. Or par Cauchy Schwarz (cf TD1), $|\langle H,L\rangle|\le ||H||_2||L||_2=o((||H||_2+||L||_2)$
   Par ailleurs, $(H,L)\mapsto\langle H,Y\rangle+\langle X,L\rangle$ est linéaire, donc on déduit de la définition que h est différentiable et que
   $$dh(X,Y).(H.L)=\langle H,Y\rangle+\langle X,L\rangle.$$
2. Par produit, somme et quotient (avec dénominateur non nul) g est différentiable sur $\mathbb{R}^{2n}-\{(0_{\mathbb{R}^n},0_{\mathbb{R}^n})\}$ $(0_{\mathbb{R}^n}=(0,...,0))$ de différentielle :
   $$dg(X,Y).(H,L)=\frac{H\langle X,Y\rangle+X(\langle H,Y\rangle+\langle X,L\rangle)}{\langle X,X\rangle+\langle Y,Y\rangle}-\frac{2X\langle X,Y\rangle(\langle H,X\rangle+\langle L,Y\rangle)}{(\langle X,X\rangle+\langle Y,Y\rangle)^2}$$
3. Comme $g(X,0_{\mathbb{R}^n})=g(0_{\mathbb{R}^n},Y)=0$, toutes les dérivées partielles sont nulles en 0 $\frac{\partial g}{\partial x_i}(0)=\frac{\partial g}{\partial y_i}(0)=0$.
4. g n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x_n=(1/n,0,...,0)=e_1/n$,
   $$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_n,x_n)=dg(x_n,x_n).(e_1,0)=\frac{e_1 2/n^2}{2/n^2}-\frac{e_1 2/n^4}{(2/n^2)^2}=e_1/2\not\to_{n\to\infty}0=\frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0).$$
   Ce qui montre que les dérivées partielles ne sont pas continues.
5. g n'est pas différentiable en $(0,...,0)$. Si elle l'était par le 3 on aurait $dg(0,0)=0$ Or montrons que $g(H,L)-g(0,0)-0\neq o(||H||_2+||L||_2)$ en effet
   $$\frac{g(x_n,x_n)}{||x_n||_2+||x_n||_2}=\frac{e_1/n^3}{2/n\times 2/n^2}=e_1/4\not\to 0.$$
6. g est positivement homogène de degré 1. En effet $\mathbb{R}^2$ est bien un cône et pour $t>0$:
   $$g(tX,tY)=\frac{tX\langle tX,tY\rangle}{\langle tX,tX\rangle+\langle tY,tY\rangle}=tg(X,Y)\ \text{ si }\ (X,Y)\neq(0_{\mathbb{R}^n},0_{\mathbb{R}^n}),\quad g(t0_{\mathbb{R}^n},t0_{\mathbb{R}^n})=0.$$

Exercice 3 (6 points) Soient $U =]0,\infty[\times \mathbb{R}$ et $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1+xy > 0\}$.

Soient $F : U \to \mathbb{R}$ et $G : V \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$F(X,Y) = \ln(1+X) - X + \frac{Y^2}{4},$$

$$g(x,y) = F(xy, x^2+y^2) = \ln(1+xy) - xy + \frac{(x^2+y^2)^2}{4},$$

1. Soit $\varphi(x,y) = 1+xy$ est continue car polynomiale et $V = \varphi^{-1}(]0,\infty[)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.
2. $$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{y}{1+xy} - y + \frac{4(x^2+y^2)x}{4} = \frac{-y^2x}{1+xy} + (x^2+y^2)x, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{x}{1+xy} - x + \frac{4(x^2+y^2)y}{4}$$

   un point critique de G vérifie $x(\frac{-y^2}{1+xy} + (x^2+y^2)) = 0 = y(\frac{-x^2}{1+xy} + (x^2+y^2))$. Donc soit on a $x = 0$ et $y^3 = 0$ donc aussi $y = 0$, soit on a $y = 0$ ce qui force $x = 0$, soit on a $x \neq 0$ et $y \neq 0$ d'où $\frac{y^2}{1+xy} = (x^2+y^2) = \frac{x^2}{1+xy} > 0$ d'où $x^2 = y^2$ et si $x = y$ cela force $\frac{x^2}{1+x^2} - 2x^2 = 0$ soit si $x \neq 0$, $1 = 2+2x^2 > 2$ ce qui est impossible. De même $x = -y \neq 0$ n'est pas possible. Le seul point critique est donc $(0,0)$
3. La matrice hessienne de G en $(0,0)$ est 0 (cf DL du 5 qui n'a pas de terme d'ordre 2 et Taylor Young). La condition suffisante d'ordre 2 pour les extrema ne conclut pas.
4. $F(X,Y) = -X^2/2 + Y^2/4 + o(||(X,Y)||_2^2)$.
5. En utilisant la question précédente on a le développement limité suivant pour G en $(0,0)$:

   $$G(x,y) = F(xy, x^2+y^2) = -x^2y^2/2 + (x^2+y^2)^2/4 + o(||xy, x^2+y^2||_2^2) = \frac{(x^2-y^2)^2 + (x^2+y^2)^2}{8} + o((x^2+y^2$$

   Soit $0 < \epsilon < 1/16$ Il existe donc $R > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in B((0,0),R) - \{(0,0)\}$:

   $$G(x,y) \geq \frac{(x^2-y^2)^2 + (x^2+y^2)^2}{8} - \epsilon(x^2+y^2)^2 > \frac{2(x^2-y^2)^2 + (x^2+y^2)^2}{16} > 0 = G(0,0).$$

   On en déduit que $(0,0)$ est un minimum local strict de G.