Université Claude Bernard | Mathématiques
L2 MASS 31 | 2013-2014

Contrôle continu
Lundi 2 Décembre 2013

Durée : 1 heure.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours (5 minutes maxi, 4 points) :

1. Enoncer le théorème d'inversion locale.
2. Donner la définition d'un minimum local.

Exercice 1 (5 points) Trouver les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^4}{4} + xy.$$

En utilisant des fonctions de 1 variable, montrer que ces extrema locaux ne sont pas globaux.

Exercice 2 (6 points) On rappelle la définition du produit de matrices $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$: $(XY)_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik}y_{kj}$. On rappelle que la trace est définie par $Tr(X) = \sum_{i=1}^n x_{ii}$, la transposée $(X^T)_{ij} = x_{ji}$ et que la norme $||X|| = \max_{ij}(|x_{ij}|)$ verifie $||XY|| \leq n||X|| \times ||Y||$.

On définit la fonction $g : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ par :

$$g(X) = \frac{X^4}{1 + Tr(X^T X)}.$$

1. Calculer, en tout point de $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ et en utilisant la définition, la différentielle de $h_2 : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, la fonction définie par $h_2(X) = X^2$, puis celle de la fonction $h_4(X) = X^4$. (Pour h_4 on pourra soit utiliser la définition soit $h_4 = h_2 \circ h_2$).
2. Calculer, si elle existe, la différentielle de g.
3. g est elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 3 (5 points+Bonus 2 points)

1. Les fonctions suivantes sont-elles (positivement) homogènes sur leurs domaines $D_F =]0,\infty[^2$, $D_G = \mathbb{R}^3$ (Si oui le montrer et donner le degré, si non, donner un contre-exemple) :

$$F(x,y) = \frac{\sqrt{x^4+y^4} + x^{1/2}y^{3/2}}{x + y\cos(\frac{x^2}{y^2})}, \qquad G(x,y,z) = x^2y + z^3e^{xy}.$$

2. Donner un développement limité (Taylor Young) de $H(X,Y) = G(X,Y,1)$ à l'ordre 2 en $(-1,0)$
3. **Bonus** Trouver les extrema locaux de G.