Université Claude Bernard
L2 MASS 31

Mathématiques
2013-2014

Correction du Contrôle continu 3

Exercice 1 (5 points) Trouvons les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^4}{4} + xy.$$

En utilisant des fonctions de 1 variable, montrer que les extrema locaux ne sont pas globaux.

On cherche les points critiques $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y, \frac{\partial f}{\partial x} = y^3 + x$. On cherche donc les (x,y) tel que $y + x^2 = 0$ et $y^3 + x = 0$

En substituant, $y = -x^2$ on obtient $-x^6 + x = 0 = x(1 - x^5)$ soit $x = 0$ ou $x = 1$.

Les deux points critiques de f sont donc $(0,0)$ et $(1,-1)$.

On calcule la hessienne :

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}$$

Donc $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $rt - s^2 = -1 < 0$ donc $(0,0)$ est un point selle, donc ce n'est pas un extrema.

$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ donc $rt - s^2 = 2 \times 3 - 1 = 5 > 0$ et $r = 2 > 0$ donc $(1,-1)$ est un minimum local strict de f. $f(x,0) = \frac{x^3}{3} \to_{x \to -\infty} -\infty$, donc le minimum n'est pas global.

Exercice 2 (6 points)

On définit la fonction $g : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ par :

$$g(X) = \frac{X^4}{1 + Tr(X^T X)}.$$

1. $h_2(X + H) = X^2 + XH + HX + H^2$ Or $T(H) := XH + HX$ est linéaire et

   $$\frac{||h_2(X+H) - h_2(X) - T(H)||}{||H||} = \frac{||H^2||}{||H||} \leq n||H|| \to_{H \to 0} 0,$$

   donc h_2 est différentiable et

   $$dh_2(X).H = XH + HX.$$

   Par composée, h_4 est aussi différentiable et

   $$\begin{aligned} dh_4(X).H = dh_2(h_2(X)).[dh_2(X).H] &= X^2[dh_2(X).H] + [dh_2(X).H]X^2 \\ &= X^2[XH + HX] + [XH + HX]X^2 \\ &= X^3H + HX^3 + X^2HX + XHX^2. \end{aligned}$$

2. Soit $g_2(X) = Tr(X^T X)$ $g_2 = Tr \circ k_2 \circ T$ avec $T(X) = (X^T, X)$ et T et Tr sont linéaires donc différentiables et $k_2(X,Y) := \frac{1}{2}(XY + YX) = \frac{1}{2}(h_2(X+Y) - h_2(X) - h_2(Y))$ est différentiable, par composée d'applications linéaires et de h_2, de différentielle

   $$dk_2(X,Y).(K,L) = dh_2(X+Y).(K+L) - dh_2(X).(K) - dh_2(Y).(L) = \frac{1}{2}(KY + YK) + \frac{1}{2}(XL + LX).$$

On remarquera que pour trouver $g_2 = Tr \circ k_2 \circ T$, on a utilisé $Tr(\frac{1}{2}(XY+YX)) = Tr(XY)$. Donc par composée g_2 est différentiable de différentielle :

$$\begin{aligned} dg_2(X).H =& Tr(dk_2(T(X)).(T(K)) = Tr(dk_2(X^T, X).(K^T, K) \\ &= Tr(\frac{1}{2}(K^TX + XK^T) + \frac{1}{2}(X^TK + KX^T)) = Tr(X^TK + K^TX). \end{aligned}$$

On peut aussi trouver la différentielle directement comme pour h_2. g est donc différentiable par quotient de fontions différentiables dont le dénominateur ne s'annule pas car $Tr(X^TX) = \sum_{ij} x_{ij}^2 \geq 0$ et sa différentielle est :

$$dg(X).H = \frac{X^3H + HX^3 + X^2HX + XHX^2}{1 + Tr(X^TX)} - \frac{X^4 Tr(X^TH + H^TX)}{(1 + Tr(X^TX))^2}.$$

3. g est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ par quotient de polynômes à dénominateur non nul.

Exercice 3 (5 points+Bonus 2 points)

1. $D_F =]0, \infty[^2, D_G = \mathbb{R}^3$ sont des cônes (pour le premier, pour $t > 0$, si $x > 0, y > 0$, alors $tx > 0, ty > 0$) Soit $t > 0$:

$$F(tx, ty) = \frac{\sqrt{t^4(x^4 + y^4)} + t^{1/2}x^{1/2}t^{3/2}y^{3/2}}{tx + ty\cos(\frac{t^2x^2}{t^2y^2})} = t^2 \frac{\sqrt{(x^4 + y^4)} + x^{1/2}y^{3/2}}{t(x + y\cos(\frac{x^2}{y^2}))} = tF(x, y)$$

   F est donc positivement homogène de degré 1.
   Montrons que G n'est pas homogène $G(tx, ty, 0) = t^3(x^2y)$ donc si G était homogène, elle serait de degré 3, hors $G(2, 2, 2) = 2^3(1 + e^4) \neq 2^3G(1, 1, 1) = 2^3(1 + e^1)$ car $e^1 \neq e^4$.

2. Donnons un développement limité (Taylor Young) de $H(X, Y) = G(X, Y, 1) = X^2Y + e^{XY}$ à l'ordre 2 en $(-1, 0)$ Comme $XY \to_{(X,Y)\to(-1,0)} 0$ et $e^t = 1 + t + t^2/2 + o(t^2)$ on déduit

$$\begin{aligned} e^{XY} &= 1 + XY + X^2Y^2/2 + o(X^2Y^2/2) = 1 + ((1 + X) - 1)Y + (1 + X - 1)^2\frac{Y^2}{2} + o((X + 1)^2 + Y^2) \\ &= 1 - Y + (X + 1)Y + \frac{Y^2}{2} + o((X + 1)^2 + Y^2). \end{aligned}$$

   De plus $X^2Y = ((1 + X) - 1)^2Y = Y - 2(1 + X)Y + (1 + X)^2Y$ et $2(1 + X)^2|Y| \leq |1 + X|^3|1 + X||Y^2| = o(((X + 1)^2 + Y^2)$. En sommant, le DL de H est :

$$H(X, Y) = Y - 2(1+X)Y + 1 - Y + (X+1)Y + \frac{Y^2}{2} + o((X+1)^2 + Y^2) = 1 - (X+1)Y + \frac{Y^2}{2} + o((X+1)^2 + Y^2).$$

3. **Bonus** En résolvant $Y(2X + e^{XY}) = 0 = X(X + e^{XY})$ on trouve que $(0, 0)$ et $(-1, 0)$ sont deux points critiques. Les DL en $(0, 0)$ et (-1,0) donnent des hessiennes $HH(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, HH(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ de déterminants négatifs, donc on a deux points selles et pas d'extremum local.