Université Claude Bernard Lyon 1

L2 - MASS 31 2010-2011

Contrôle continu
Jeudi 25 Novembre 2010

Durée : 45 mn

Les documents et les calculatrices sont interdits

Question de cours. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et $\Phi : I \to U$ une fonction dérivable. On note $\Phi(t) = (\Phi_1(t), \Phi_2(t), \cdots, \Phi_n(t))$. On pose $F(t) := f \circ \Phi(t)$. Donner la dérivée $F'(t)$ en fonction des Φ_i' et des dérivées partielles de f.

Exercice 1. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 \cos y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{en} \quad (0,0) \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\Phi(X,Y) = (2X - Y, Y - X)$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On pose $F := f \circ \Phi$.

1) Montrer que F a des dérivées partielles premières $\frac{\partial F}{\partial X}$ et $\frac{\partial F}{\partial Y}$ et les calculer en fonction des dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f.

2) On suppose que f est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^2 \qquad (1)$$

A quelle équation aux dérivées partielles satisfait F ?

3) Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, solutions de l'équation (1).