Université Claude Bernard Lyon 1

Contrôle Continu Final
MASS 31

Jeudi 17 Janvier 2013

Durée : 2 heures.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses.

Exercice 1 (6 points+Bonus 1 point))

Soient $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1, y > 0\}$ et $G = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 4t \leq z^2, t > 0\}$.
Soit $f : \mathbb{R}\times]0,\infty[\to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = (\frac{1}{y} + x, \frac{x}{y}).$$

1. Montrer que F est un fermé et calculer son intérieur $U = Int(F)$.
2. **Bonus** : Montrer que la restriction $f_1 : F \to G$ définie par $f_1(x,y) = f(x,y)$ est un homéomorphisme.
3. Calculer la matrice jacobienne de f en tout point de $\mathbb{R}\times]0,\infty[$.
4. Montrer que f et f_1 (la restriction définie à la question 2) ne sont pas des difféomorphismes.
5. Montrer qu'il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ tel que la restriction $f_2 : U \to V$ définie par $f_2(x,y) = f(x,y)$ soit un difféomorphisme.
6. Calculer la différentielle de f_2^{-1} en $(3,2)$.

Exercice 2 (4 points)

On définit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x,y) = exp(x^2y) + x + y.$$

1. Montrer que la relation $g(x,y) = 0$ définit au voisinage de $(0,-1)$ une fonction implicite φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $g(x,\varphi(x)) = 0$ et $\varphi(0) = -1$.
2. Calculer $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
3. Donner un développement limité (Taylor Young) de g à l'ordre 2 en $(0,-1)$.
4. Donner un développement limité de φ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 3 (5 points) Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\mathrm{f}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 2y.$$

1. Rappeler le théorème des multiplicateurs de Lagrange et démontrer qu'il existe 4 points en lesquels f peut avoir un extremum local sous la contrainte $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.
2. Montrer que $C = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{9} + y^2 = 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. En déduire 3 points où f atteint un extremum global sous la contrainte $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.
3. En utilisant les conditions du second ordre, montrer que $(0, 1)$ est un minimum local strict non global de f sur C.

Exercice 4 (5 points)

On rappelle la définition du produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Pour $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On fixe $A, B \in \mathbb{R}^n$.

On définit les fonctions $F :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt,$$

$$h(X, t) = \langle A, X \rangle e^{t^4 \langle B, X \rangle},$$

$$H(X) = \int_0^1 h(X, t) dt.$$

1. Montrer que h est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Montrer que F est continue et H est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 5 (Bonus 1 point)

Trouver les extrema locaux de $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$K(x, y, z) = x^2 + y^2 + yz + xyz.$$