Université Claude Bernard Lyon 1

Contrôle Continu Final
MASS 31

Jeudi 17 Janvier 2013

Durée : 2 heures.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses.

Exercice 1 (6 points)

Soient $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1, y > 0\}$ et $G = \{(z, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 4t \leq z^2, t > 0\}$.
Soit $f : \mathbb{R}\times]0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = (\frac{1}{y} + x, \frac{x}{y}).$$

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1, y > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1, y \geq 0\}$ car si $xy \geq 1$ $y \neq 0$ donc $y \geq 0 \Leftrightarrow y > 0$. Donc si on considère les applications polynomiales donc continues $p_2(x, y) = y$, $m(x, y) = xy$. $F = m^{-1}([1, \infty[) \cap p_2^{-1}([0, \infty[)$ est un fermé comme intersection de deux images réciproques de fermés par des applications continues. Montrons que l'intérieur de F est $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1, y > 0\} = m^{-1}(]1, \infty[) \cap p_2^{-1}(]0, \infty[)$. C'est d'abord un ouvert comme intersection de deux images réciproques d'ouverts par des applications continues donc comme $U \subset F$ on déduit $U \subset Int(F)$. Réciproquement montrons que $U^c \subset Int(F)^c = \overline{F^c}$. En effet, $U^c = F^c \cup m^{-1}(\{1\})$ et si $xy = 1$, $(x + 1/n)y = 1 + y/n > 1$ donc $(x + 1/n, y) \in F^c$ et tend vers (x, y) donc $m^{-1}(\{1\}) \subset \overline{F^c}$.
2. Montrons que la restriction $f_1 : F \to G$ définie par $f_1(x) = f(x)$ est un homéomorphisme. D'abord, si $(x, y) \in F$, on a $x, y > 0$ donc $t = x/y > 0$ et $z^2 = (1/y + x)^2 = 1/y^2 + x^2 + 2x/y \geq 4x/y = 4t$ car $2ab \leq a^2 + b^2$ donc $f(F) \subset G$ et f_1 est bien définie et continue comme fraction rationnelle. On résout $(z, t) = (1/y + x, x/y)$ pour trouver son inverse et montrer qu'elle est bijective. $x = z - b$ avec $b = 1/y$ donc $(z - b)b = t$ soit $b^2 - bz + t = 0$. Par résolution de l'équation de degré 2 en b le discriminant est $z^2 - 4t \geq 0$. pour $(z, t) \in G$. Par symétrie b, x des équations de départs ce sont les deux racines et comme dans F on cherche $x \geq 1/y = b$, x est la plus grande racine $x = \frac{z+\sqrt{z^2-4t}}{2}$ et b l'autre soit $1/b = y = \frac{2}{z-\sqrt{z^2-4t}}$. On vérifie donc par construction $xy \geq 1$ et vu $t > 0$ $z^2 - 4t < z^2$ donc $y > 0$ comme souhaité. On vérifie de plus réciproquement que c'est bien une solution dans F, donc f_1 est inversible d'inverse :

$$f_1^{-1}(z, t) = (\frac{z + \sqrt{z^2 - 4t}}{2}, \frac{2}{z - \sqrt{z^2 - 4t}}).$$

Par quotient et composition de polynôme et de racine carrés, on voit que l'inverse est continue donc f_1 est un homéomorphisme.

3. Calculons la matrice jacobienne de f en tout point de $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ vu que f est $\mathcal{C}^\infty$ comme somme, et quotient (à dénominateur non nul) de coordonnées.

$$J(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1/y^2 \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}.$$

4. f n'est pas bijective car $f(x,y) = f(1/y, 1/x)$ (par ex $f(1,2) = f(1/2,1)$) et f_1 est défini sur un fermé qui n'est pas un ouvert, ce ne sont pas des difféomorphismes.
5. Sur U, f est $\mathcal{C}^\infty$ injective par 2) et $det(J(f)) = -x/y^2 + 1/y^3 = (1-xy)/y^3 < 0$ ne s'annule pas donc par le théorème d'inversion globale, on a la conclusion : il existe un ouvert $V = f(U)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que la restriction $f_2 : U \to V$ définie par $f_2(x,y) = f(x,y)$ soit un difféomorphisme.
6. Par le cours $J(f_2^{-1})(3,2) = [J(f_2)(f_2^{-1}(3,2))]^{-1}$. Or $f_2^{-1}(3,2) = (2,1)$ d'où

$$J(f_2^{-1})(3,2) = \begin{pmatrix} 1 & -1/1^2 \\ 1/1 & -2/1^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $df_2^{-1}(3,2).(h_1,h_2) = (2h_1 - h_2, h_1 - h_2)$.

Exercice 2 (4 points)

On définit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x,y) = exp(x^2y) + x + y.$$

1. g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme somme et composée de fonctions $\mathcal{C}^infty$ (polynomes et exp). $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^2exp(x^2y) + 1 \geq 1 > 0$. Donc en particulier $\frac{\partial g}{\partial y}(0,-1) > 0$, donc d'aprés le théorème des fonctions implicites il existe $a, b > 0$ et $\varphi :]-a,a[\to]-1-b, -1+b[$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $g(x,\varphi(x)) = 0$, $\varphi(x)$ est l'unique solution de cette équation (donc la relation définit bien φ) et $\varphi(0) = -1$.
2. $$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x))} = -\frac{2x\varphi(x)exp(x^2\varphi(x)) + 1}{x^2exp(x^2\varphi(x)) + 1}.$$
3. En utilisant la formule de Taylor Young pour exp à l'ordre 1 on obtient :

$$g(x,y) = 1+x^2y+x+y+o(x^2y) = 1+x^2(y+1)-x^2+x+y+o(x^2) = 1-x^2+x+(y+1)-1+o(x^2).$$

c'est un DL pour g à l'ordre 2 en $(0,-1)$, on peut aussi l'écrire :

$$g(h_1, -1+h_2) = -h_1^2 + h_1 + h_2 + o(h_1^2) = -h_1^2 + h_1 + h_2 + o(h_1^2 + h_2^2).$$

4. En cherchant $\varphi(x) = -1 + ax + bx + o(x^2)$ et en utilisant le DL (amélioré avec $o(h_1^2)$ venant du DL de exp) on obtient :

$$g(x, -1 + ax + bx + o(x^2)) = -x^2 + x + ax + bx + o(x^2) = 0$$

d'où en identifiant par unicité d'un DL : $a = -1, b = 1$ soit

$$\varphi(x) = -1 - x + x^2 + o(x^2).$$

Exercice 3 (5 points) Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\mathrm{f}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + 2y.$$
$$C = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{9} + y^2 = 1\}$$
$$g(x,y) = \frac{x^2}{9} + y^2 - 1$$

1. Pour le Th, cf cours. $\nabla g(x,y) = (2x/9, 2y) \neq (0,0)$ pour $x, y \in C$ respectant la contrainte, vu que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ($\subset C$) par composée et g $\mathcal{C}^\infty$, donc le théorème des multiplicateurs de Lagrange s'applique. On pose $L(x,y,\lambda) = \mathrm{f}(x,y) + \lambda g(x,y)$ le Lagragien et les extrema de f sont parmi les points critiques de L qui vérifient :
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lambda\frac{2x}{9} = 0 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2 + \lambda 2y = \frac{x^2}{9} + y^2 - 1.$$
La première équation équivaut à $x = 0$ ou $-2\lambda\sqrt{x^2+y^2} = 9$.
Si $x = 0$ on a par la contrainte $y = +1$ (auquel cas $\lambda = -3/2$) ou $y = -1$ (auquel cas $\lambda = 1/2$).
Si $-2\lambda\sqrt{x^2+y^2} = 9$ (en particulier cela implique $\lambda < 0$) la deuxième équation devient $(-2\lambda/9 + 2\lambda)y + 2 = 16\lambda y/9 + 2 = 0$ d'où $y = -9/8\lambda$ et la troisième équation devient $\frac{x^2+y^2}{9} + 8/9y^2 = 1 = (9/2\lambda))^2/9 + 8.9^2/9.8^2\lambda^2$ soit $\lambda^2 = 9/4 + 9/8 = 27/8$ donc (vu $\lambda < 0$) $\lambda = -3\sqrt{3}/2\sqrt{2}$ et alors $y = \sqrt{3}/2\sqrt{2}$ et $x^2 = 81.8/4.27 - y^2 = 6 - 3/8 = 45/8$ d'où $x = \pm 3\sqrt{5}/2\sqrt{2}$. Les 4 points en lesquels f peut avoir un extremum local sous la contrainte $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. sont donc : $(0,1), (0,-1), (3\sqrt{5}/2\sqrt{2}, \sqrt{3}/2\sqrt{2})$ et $(-3\sqrt{5}/2\sqrt{2}, \sqrt{3}/2\sqrt{2})$.
2. Montrons que $C = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{9} + y^2 = 1\}$ est un fermé borné donc un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet $C = g^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue et C est borné car $(x,y) \in C$ implique $|x| \leq 3, |y| \leq 1$ donc $C \subset [-3,3]^2$ qui est une boule pour la norme infini.
Comme C est compact f atteint ses bornes sur C De plus $\mathrm{f}(\pm 3\sqrt{5}/2\sqrt{2}, \sqrt{3}/2\sqrt{2}) = 6 + \sqrt{3}/\sqrt{2} > \mathrm{f}(0,1) = 3 > \mathrm{f}(0,-1) = -1$ donc donc f atteint son maximum global en $(\pm 3\sqrt{5}/2\sqrt{2}, \sqrt{3}/2\sqrt{2}$ et son minimum global en $(0,-1)$.
3. En $(0,1)$, $\nabla g(0,1) = (0,2)$ donc $(1,0)$ qui lui est orthogonal est un vecteur directeur du plan tangent à la contrainte. Par le théorème des conditions du second ordre avec contraintes, il suffit donc de regarder le signe de $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(0,1,-3/2)$ Or $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2x^2}{2\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \lambda\frac{2}{9}$, d'où $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(0,1,-3/2) = 1 - 3.2/2.9 = 2/3 > 0$ donc $(0,1)$ est un minimum local strict (non global car on a vu que sa valeur est plus grande que -1, valeur du minimum global atteint en $(0,-1)$) de f sur C.

Exercice 4 (5 points)

On rappelle la définition du produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Pour $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,$Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$:
$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

On fixe $A, B \in \mathbb{R}^n$.

On définit les fonctions $F :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt,$$
$$h(X,t) = \langle A, X\rangle e^{t^4\langle B,X\rangle},$$
$$H(X) = \int_0^1 h(X,t)dt.$$

1. h est $\mathcal{C}^1$ par composée donc différentiable et sa différentielle est (par composée, produit, et cas de e^{t^4y})

$$dh(X,t).(H,s) = \langle A, H\rangle e^{t^4\langle B,X\rangle} + \langle A, X\rangle e^{t^4\langle B,X\rangle}(4t^3l\langle B, X\rangle + \langle B, H\rangle t^4).$$

2. Pour $x > \epsilon$
$\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} \leq 1_{[0,1]}(t)\frac{1}{\sqrt{t}} + e^{-\epsilon t} = g(t)$
Or Pour $L \geq 1 \geq K$ $\int_K^L g(t)dt = [\sqrt{t}]_K^1 - [\frac{1}{\epsilon}e^{-\epsilon t}]_K^L \leq 1 + e^{-\epsilon K} \leq 2$ qui est donc bornée pour $K \to 0, L \to \infty$ donc g est une fonction intégrable qui domine l'intégrande de F qui est continue sur $]0,\infty[^2$. Donc, par le théorème de continuité avec condition de domination F est continue sur $]\epsilon,\infty[$ et comme ϵ est arbitraire, cela conclut. H est de classe $\mathcal{C}^1$ car $h(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \times [0,1]$ et par le théorème de dérivation sur les segments.

Exercice 5 (Bonus 1 point)

Trouver les extrema locaux de $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$K(x,y,z) = x^2 + y^2 + yz + xyz.$$

Un point critique de K vérifie $2x + yz = 0 = 2y + z + xz = y + xy$. de la dernière équation $y = 0$ ou $x = -1$. Si $x = -1$, $y = 0$ par la deuxième équation ce qui contredit la première. Si $y = 0$, $x = 0$ par la première équation, donc $z = 0$ par la deuxième. Donc $(0,0,0)$ est l'unique point critique de K la hessienne est :

$$HK(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

vu que le déterminant du bloc 2×2 est -1 il n'est ni positif ni négatif, donc c'est aussi le cas de $HK(0,0,0)$. Donc $(0,0,0)$ est un point selle et K n'a pas d'extremum local.