Université Claude Bernard Lyon 1

Correction du Contrôle Continu Final
MASS 31

Exercice 1 (6 points) Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ |y \neq 0\}$.

Soit $f : U \to U$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = (x^3 + y, \frac{1}{y}).$$

1. Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $p(x,y) = y$, fonction continue car linéaire donc $U = p^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ est ouvert comme image réciproque d'un ouvert (le complémentaire d'un singleton donc d'une boule fermée ici) par l'application continue p.
   Montrons que $\overline{U} = \mathbb{R}^2$ Comme $\overline{U} \subset \mathbb{R}^2$ est évident, on montre l'autre inclusion. $\mathbb{R}^2 - U = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ $(x, 1/n) \in U$ et $(x,1/n) \to (x,0)$ d'où $\mathbb{R}^2 - U \subset \overline{U}$ ce qui conclut.
2. Montrons que $f : U \to U$ est un homéomorphisme. Montrons que c'est d'abort une bijection, si $(z,t) = (x^3 + y, \frac{1}{y})$ avec $t \neq 0$ vu $y \neq 0$, $y = 1/t$ et $x = (z - 1/t)^{1/3}$ (et c'est l'unique solution d'après la continuité et la croissance stricte de $x \mapsto x^3$ qui implique qu'elle est bijective de réciproque $x \mapsto x^{1/3}$ continue, cf résultat 1ère année). On a donc $f^{-1}(z,t) = ((z-1/t)^{1/3}, 1/t)$ qui est bien défini sur U.
   De plus la fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}$, donc la deuxième coordonnée de f et f^{-1} sont continues. De même la première coordonnée de f est polynomiale donc continue et celle de f^{-1} est continue par composée d'une application linéaire, de la fonction inverse et de la fonction racine cubique dont on a rapellé la continuité ci-dessus.
   En bilan ; f et f^{-1} sont continues donc f est un homéomorphisme.
   Si f était continue il en serait de même de $g(x) = f(x,1) = (x^3+1,1)$ or on a $||g(n) - g(n+1/n)||_\infty = (n+1/n)^3 - n^3 = 3n^2/n + 3n/n^2 + 1/n^3 \geq 3n \to \infty$ donc $\exists \epsilon = 1, \forall \eta > 0 \exists x_\eta, y_\eta ||x_\eta - y_\eta||_\infty \leq \eta$ et $||g(x_\eta) - g(y_\eta)||_\infty \geq \epsilon = 1$ ce qui montre g n'est pas uniformément continue. (on prend si $\eta \geq 1/n, n \geq 1$ $x_\eta = n, y\eta = n + 1/n$.)
3. Calculons la matrice jacobienne de f en tout point de U vu que f est $\mathcal{C}^\infty$ comme fonction à coordonnée polynôme ou quotient (à dénominateur non nul) de coordonnées.
   $$J(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ 0 & -1/y^2 \end{pmatrix}.$$
4. Comme $det(J(f)(0,y)) = 0$, f ne peut pas être un difféomorphisme sur tout ouvert contenant un $(0,y)$, donc en particulier sur U ou $\mathbb{R} \times]0, \infty[$
5. Sur V, $det(J(f)(x,y)) = -x^2/y^2 < 0$ ne s'annule pas, et f est $\mathcal{C}^\infty$ et injective par 2) et donc par le théorème d'inversion globale, on a la conclusion : il existe un ouvert $W = f(V)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que la restriction $f_1 : V \to W$ définie par $f_1(x,y) = f(x,y)$ soit un difféomorphisme.

6. Par le calcul précédent, $J(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, donc $df_1(1,1).(h_1,h_2) = (3h_1 + h_2, -h_2)$.
   Par le cours $J(f_1^{-1})(2,1) = [J(f_1)(f_1^{-1}(2,1))]^{-1}$. Or $f_1^{-1}(2,1) = (1,1)$ d'où
   $$J(f_1^{-1})(2,1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
   donc $df_1^{-1}(2,1).(h_1,h_2) = (h_1/3 + h_2/3, -h_2)$.

Exercice 2 (4 points)

On définit la fonction $g :]-1,1[^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x,y) = ln(1+xy) + x^2 + y.$$

1. g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme somme et composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ (polynomes et ln vu $(x,y) \in]-1,1[$ implique $1 + xy \in]0,2[$ inclut dans le domaine de ln). $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+xy} + 1$. Donc en particulier $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 1 > 0$, donc d'après le théorème des fonctions implicites il existe $a, b > 0$ et $\varphi :]-a,a[\to]-b,+b[$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $g(x,\varphi(x)) = 0$, $\varphi(x)$ est l'unique solution de cette équation (donc la relation définit bien φ) et $\varphi(0) = 0$.
2. $$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x))} = -\frac{\frac{\varphi(x)}{1+x\varphi(x)} + 2x}{\frac{x}{1+x\varphi(x)} + 1}.$$
3. En utilisant la formule de Taylor Young pour ln à l'ordre 1 on obtient :
   $$g(x,y) = xy + x^2 + y + o(xy) = xy + x^2 + y + o(x^2 + y^2).$$
   c'est un DL pour g à l'ordre 2 en $(0,0)$.
4. En cherchant $\varphi(x) = ax + bx^2 + o(x^2)$ et en utilisant le DL de g, on obtient :
   $$g(x, ax+bx^2+o(x^2)) = x(ax+bx^2+o(x^2))+x^2+ax+bx^2+o(x^2) = (a+1)x^2+ax+bx^2+o(x^2) = 0$$
   d'où en identifiant par unicité d'un DL : $a = 0, b = -1$ soit
   $$\varphi(x) = -x^2 + o(x^2).$$

Exercice 3 (5 points) Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\mathrm{f}(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^4}{4}.$$
$$C = \{(x,y) \mid x^2 + \frac{y^2}{2} = 1\}$$
$$g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{2} - 1$$

1. Pour le Th, cf cours. $\nabla g(x,y) = (2x,y) \neq (0,0)$ pour $x, y \in C$ respectant la contrainte, vu que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale et g $\mathcal{C}^\infty$, donc le théorème des multiplicateurs de Lagrange s'applique. On pose $L(x,y,\lambda) = \mathrm{f}(x,y) + \lambda g(x,y)$ le Lagragien et les extrema de f sont parmi les points critiques de L qui vérifient :
$$x^2 + \lambda 2x = 0 = y^3 + \lambda y = x^2 + \frac{y^2}{2} - 1.$$
La première équation équivaut à $x = 0$ ou $x = -2\lambda$ et la deuxième à $y = 0$ ou $y^2 = -\lambda$
Si $x = 0$ on a par la contrainte $y = \pm\sqrt{2}$ (et dans chaque cas $\lambda = -y^2 = -2$).
Si $y = 0$, on a par la contrainte $x = \pm 1$ (et dans chaque cas $\lambda = -x/2 = \mp 1/2$).
Si $x = -2\lambda$ et $\lambda = -y^2$ donc $x = 2y^2$ la contrainte donne $x^2 + x/4 = 1$ soit $\Delta = 1/16 + 4$ soit $x = X := (-1/4 + \sqrt{1/16 + 4})/2$ (la seule racine positive et $y = \pm\sqrt{x/2}$.
Les 6 points en lesquels f peut avoir un extremum local sous la contrainte $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ sont donc : $(0, \sqrt{2}), (0, -\sqrt{2}), (1, 0)$, $(-1, 0)$, $((-1/4 + \sqrt{1/16+4})/2, \sqrt{(-1/4 + \sqrt{1/16+4})/2})$, et $(((-1/4 + \sqrt{1/16+4})/2, -\sqrt{(-1/4 + \sqrt{1/16+4})/2}))$.
2. Montrons que $C = \{(x,y) \mid x^2 + \frac{y^2}{2} = 1\}$ est un fermé borné donc un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet $C = g^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue car polynomiale et C est borné car $(x,y) \in C$ implique $|x| \leq 1, |y| \leq 2$ donc $C \subset [-2,2]^2$ qui est une boule pour la norme infini.
Comme C est compact f atteint ses bornes sur C De plus on a $\mathrm{f}(\pm 1, 0) = \pm 1/3$ et $\mathrm{f}(0, \pm\sqrt{2}) = 1$ De même $f(X, \pm\sqrt{X}2) = X^3/3 + X^2/16 \in [0, 1/3 + 1/16]$, car $X \in [0,1]$ (vu $\sqrt{1/16+4} \leq \sqrt{1/16} + \sqrt{4} = 2 + 1/4$ Donc on a $\mathrm{f}(-1,0) < f(X, \pm\sqrt{X}2) < f(0, \pm\sqrt{2})$ et $\mathrm{f}(-1,0) < f(1,0) < f(0, \pm\sqrt{2})$.
Donc f atteint son maximum global qui vaut 1 en $(0, \pm\sqrt{2})$ et son minimum global $-1/3$ en $(-1, 0)$.
3. En $(1;0)$, $\nabla g(1,0) = (2,0)$ donc $(0;1)$ qui lui est orthogonal est un vecteur directeur du plan tangent à la contrainte. Par le théorème des conditions du second ordre avec contraintes, il suffit donc de regarder le signe de $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1, 0, -1/2)$. Or $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 3y^2 + \lambda/2$, d'où $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1, 0, -1/2) = -1/4 < 0$ donc $(1, 0)$ est un maximum local strict (non global car on a vu que sa valeur est plus petite que 1, valeur du maximum global atteint en $(1, 0)$) de f sur C.
Autre méthode, on calcule le déterminant du Lagrangien et on trouve $2 > 0$ et on retrouve la conclusion de maximum local.

Exercice 4 (5 points) On définit les fonctions $G :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :
$$F(x) = \int_0^1 \cos(xt) e^{-t^3} dt.$$

$$G(t) = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{t}} dx,$$

1. $(x,t) \to \cos(xt)e^{-t^3}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ par produit de composées de polynomes (xt et t^3) et des fonctions C^∞ cos et exp donc par le théorème des intégrales sur un segment, on déduit $F'(x) = -\int_0^1 [t\sin(xt)e^{-t^3}]dt$.
2. Pour $t > \epsilon, \epsilon \leq 1$

$$e^{-\frac{x^2}{t}} \leq 1_{[0,1]}(x) + e^{-x/\epsilon} 1_{[1,\infty[}(x) = g(x)$$

Or Pour $L \geq 1 \geq K$ $\int_K^L g(t)dt = [t]_K^1 - [\epsilon e^{-t/\epsilon t}]_K^L \leq 1 + e^{-K/\epsilon} \leq 2$ qui est donc bornée pour $K \to 0, L \to \infty$ donc g est une fonction intégrable qui domine l'intégrande de F qui est continue sur $]0,\infty[\times]\epsilon,\infty[$. Donc, par le théorème de continuité avec condition de domination G est continue sur $]\epsilon,\infty[$ et comme ϵ est arbitraire, cela conclut.

Exercice 5 (Bonus 1 point)

Trouver les extrema locaux de $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$K(x,y,z) == \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^2}{2} + yz - x.$$

Un point critique de K vérifie $x^2 - 1 = 0 = y^2 + z = z + y$. de la dernière équation $y = -z$ soit de la deuxième, $z^2 + z = 0$ donc $z = 0$ ou -1. Enfin $x = \pm 1$ Les points critiques sont donc $(1,0,0), (-1,0,0), (1,1,-1)$ et $(-1,1,-1)$

La hessienne de K est

$$HK(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $HK(\pm 1,0,0) = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. le deuxième bloc 2×2 a déterminant $-1 < 0$ donc la matrice n'est ni positive ni négative, donc $(\pm 1,0,0)$ sont des points selles. $HK(1,1,-1) = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, le déterminant du bloc est $2.1 - 1 = 1 > 0$ donc le deuxième bloc est à valeurs propres positives et 2 est aussi positif, donc toutes les valeurs propores sont positives, $(1,1,-1)$ est donc un minimum local strict. $(-1,1,-1)$ est un point selle (car -2 est une valeur propre et le même deuxième bloc est à valuers propres positives).

K a donc un unique minimum local $(1,1,-1)$.