Université Claude Bernard Lyon 1

Contrôle Continu Final
MASS 31

Lundi 13 Janvier 2014

Durée : 2 heures.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses.

Exercice 1 (7 points)

Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | y \neq 0\}$.
Soit $f : U \to U$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = (x^3 + y, \frac{1}{y}).$$

1. Montrer que U est un ouvert et montrer que U est dense dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $f : U \to U$ est un homéomorphisme et que f n'est pas uniformément continue.
3. Calculer la matrice jacobienne de f en tout point de U.
4. Montrer que f n'est pas un difféomorphisme.
5. Montrer que la restriction f_1 de f à l'ouvert $V =]0,\infty[^2$ de $\mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme.
6. Calculer la différentielle de f_1 en $(1,1)$ et celle de f_1^{-1} en $(2,1)$.

Exercice 2 (4 points)

On définit la fonction $g :]-1,1[^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x,y) = \ln(1+xy) + x^2 + y.$$

1. Montrer que la relation $g(x,y) = 0$ définit au voisinage de $(0,0)$ une fonction implicite φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $g(x,\varphi(x)) = 0$ et $\varphi(0) = 0$.
2. Calculer $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
3. Donner un développement limité (Taylor Young) de g à l'ordre 2 en $(0,0)$.
4. Donner un développement limité de φ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 3 (5 points) Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\mathrm{f}(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^4}{4}.$$

1. Rappeler le théorème des multiplicateurs de Lagrange et démontrer qu'il existe 6 points en lesquels f peut avoir un extremum local sous la contrainte $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$.
2. Montrer que $C = \{(x,y) \mid x^2 + \frac{y^2}{2} = 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. En déduire 3 points où f atteint un extremum global sous la contrainte $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$.
3. En utilisant les conditions du second ordre, montrer que $(1,0)$ est un extremum local strict non global de f sur C dont on précisera la nature (maximum ou minimum).

Exercice 4 (4 points)

On définit les fonctions $G :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \int_0^1 \cos(xt) e^{-x^3} dx.$$

$$G(t) = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{t}} dx,$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que G est continue.

Exercice 5 (Bonus 2 points)

Trouver les extrema locaux de $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$K(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^2}{2} + yz - x.$$